

И. Ф. Шарыгин

 | российский  
учебник

---

# ГЕОМЕТРИЯ

---

Учебник

Рекомендовано  
Министерством просвещения  
Российской Федерации

*7-е издание, исправленное*

Москва

 ДРОФА

2020



УДК 373.167.1:514  
ББК 22.151я72  
Ш26

**Одобрено Научно-редакционным советом корпорации  
«Российский учебник» под председательством академиков  
Российской академии наук В. А. Тишкова и В. А. Черешнева**

**Шарыгин, И. Ф.**

Ш26 Геометрия. 7—9 классы : учебник / И. Ф. Шарыгин. — 7-е изд., испр. — М. : Дрофа, 2020. — 462, [2] с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-358-23076-7

Учебник входит в учебно-методический комплекс по геометрии для 7—11 классов и реализует авторскую наглядно-эмпирическую концепцию построения школьного курса геометрии.

Большое внимание уделено методам решения геометрических задач. В теоретической части разделы, отмеченные звёздочкой, предназначены для углублённой подготовки, система задач дифференцирована по уровням сложности.

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования и включён в Федеральный перечень.

**УДК 373.167.1:514**

**ББК 22.151я72**

ISBN 978-5-358-23076-7

© ООО «ДРОФА», 2018

© ООО «ДРОФА», 2020, с изменениями

## От автора

---

Чем математика отличается от других школьных предметов? Наверняка любой школьник сумеет ответить на этот вопрос, указав немало важных отличий. Я же хочу обратить внимание на две особенности. С математикой приходится встречаться на протяжении всей школьной жизни.

Во всех классах, от первого до последнего, бывают уроки математики. И этим математика отличается от любого другого школьного предмета, кроме... физкультуры.

Вторая особенность состоит в том, что начиная с некоторого момента математика как бы раздваивается и в расписании уроков появляются её разделы: алгебра и геометрия. Изучаются эти разделы на разных уроках, по разным учебникам, а иногда их даже ведут разные учителя.

Чем же геометрия выделяется среди других разделов математики? Прежде всего, геометрия, наверное, самая древняя наука. Более того, сам термин «математика» возник сравнительно недавно, так что учёные древности и Средневековья, занимавшиеся в нашем понимании математикой, называли себя геометрами. Некоторые теоремы геометрии являются одними из древнейших памятников мировой культуры. Они старше самой Библии. Помните об этом, изучая геометрию. И если вы любите и интересуетесь историей, то должны неплохо знать и геометрию.


Однако далеко не все школьники испытывают большую любовь к математике. Некоторые не слишком хорошо выполняют арифметические действия, плохо разбираются в процентах, и вообще, пришли к выводу, что у них нет никаких математических способностей. Хочу их обрадовать: геометрия — это не совсем математика. Во всяком случае, это совсем не та математика, с которой до сих пор вам приходилось иметь дело. Геометрия — это предмет для тех, кому нравится фантазировать, рисовать и рассматривать картинки, кто умеет наблюдать, замечать и делать выводы.

Геометрия — необычайно важный и интересный предмет, и любой человек может найти в ней уголок по душе.

Один мудрец сказал: «Высшее проявление духа — это разум. Высшее проявление разума — это геометрия. Клетка геометрии — треугольник. Он так же неисчерпаем, как и Вселенная. Окружность — душа геометрии. Познайте окружность, и вы не только познаете душу геометрии, но и возвысите душу свою».

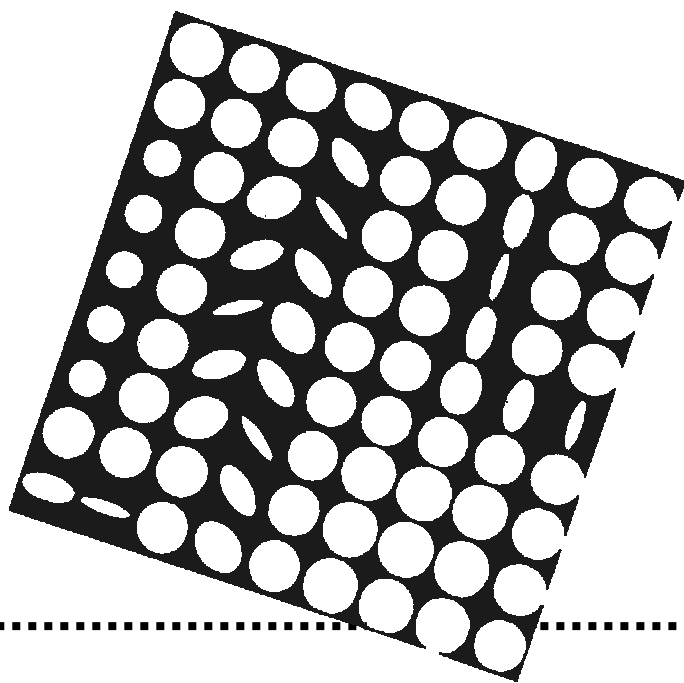
Некоторые задачи учебника отмечены буквами. Буква (н) показывает, что задача начальная. Решение таких задач подготовит к восприятию более сложных задач. Буква (в) сопровождает важные задачи. Эти задачи надо непременно решить и хорошо усвоить либо метод решения, либо сообщаемый в них факт. Буква (п) означает, что задача полезная, буква (т) — трудная. Этими буквами обозначены задачи, предназначенные тем, кто хочет лучше овладеть теорией геометрии и научиться решать трудные задачи.

С помощью значка \* выделен материал, который не является обязательным.

Значок  показывает, что можно обратиться к электронной форме учебника, где имеются дополнительные информационные материалы и задания для самоконтроля.

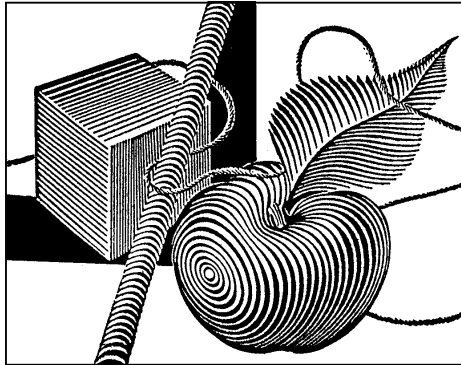
Седьмой

класс



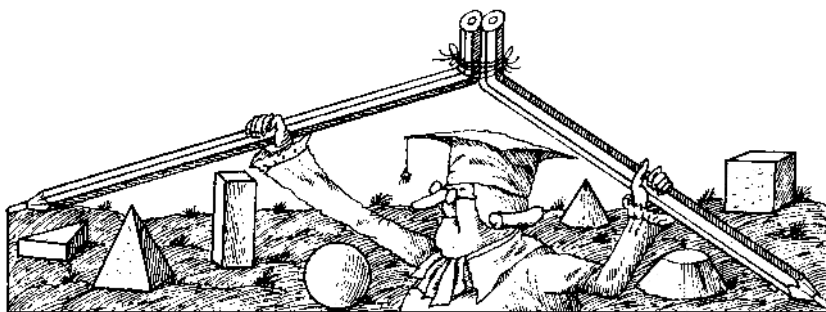
---

## Геометрия как наука. Первые понятия



*Предмет, к изучению которого мы приступаем, называется **геометрия**. Но было бы неверным утверждать, что до сих пор вы ничего о ней не знали. Вам не раз приходилось встречаться с треугольниками и пирамидами, квадратами и кубами, окружностями и шарами. Не так много, но кое-что об этих телах и фигурах вы знаете, хорошо представляете себе, как они выглядят, и понимаете, что все они имеют отношение к геометрии.*

*Утверждение, что мы приступаем к изучению геометрии, означает прежде всего, что в учебнике излагается систематический курс геометрии. Это, в свою очередь, значит, что мы постепенно, шаг за шагом будем строить геометрическую теорию, последовательно доказывая все утверж-*



дения в соответствии с законами математики, выводя их из уже известных утверждений.

Прежде всего, что такое геометрия? Слово **геометрия** состоит из двух частей **гео** и **метрия** и в переводе с греческого языка означает **землемерие**.

Но уже давно геометрия вышла за узкие рамки, обозначенные этим буквальным пониманием. Если мы заглянем в любой энциклопедический словарь, то обнаружим очень большую статью, начинающуюся примерно так:

**Геометрия** — это раздел математики, изучающий пространственные формы и их отношения. А что это означает? Что такое «пространственные формы» и в чём состоят «их отношения»?

## 1.1. Геометрическое тело

**i** Важнейшей пространственной формой является **геометрическое тело**, а одним из видов пространственных отношений — взаимное расположение геометрических тел.

Один из крупнейших математиков XX в. А. Пуанкаре сказал так: «Не будь в природе твёрдых тел, не было бы и геометрии».

Каждый из вас без труда может привести примеры различных тел, встречающихся в окружающем нас мире: жилой дом, булыжник, заводская труба, капля смолы и т. д.

Говоря «геометрическое тело», мы тем самым подчёркиваем, что нас не интересуют физические свойства тела: масса, цвет, материал и др., что рассматривать и изучать мы будем лишь его форму и размеры. Можно сказать, что мы рассматриваем ту часть пространства, которую соответствующее тело занимает.

Если взглянуть на окружающие нас предметы как на геометрические тела, то можно, например, сказать, что дом и кирпич имеют одинаковую форму — форму параллелепипеда и отличаются лишь размерами, что заводская труба часто имеет форму цилиндра, а футбольный мяч — форму шара.

Конечно, реальный кирпич следует рассматривать как параллелепипед лишь приближённо. Проведя достаточно точные измерения, можно обнаружить небольшие отклонения от результатов, которые должны получиться, если бы кирпич был действительно параллелепипедом. Да и точность наших измерений ограничена, в то время как размеры параллелепипеда считаются заданными абсолютно точно. Однако для практических нужд все эти отклонения несущественны, и кирпич удобно рассматривать как параллелепипед.

Или рассмотрим нашу планету Земля. Часто говорят, что она имеет форму шара. Это удобно для многих практических и учебных целей. Однако с геометрической точки зрения это не совсем верно. Измерения, проведённые в XVII в., показали, что Земля имеет форму *геоида* — шара, немного сплюсненного вдоль одного из диаметров — оси Земли.

**i** Геометрическое тело имеет *три измерения*. Условно мы их называем: *длина*, *ширина* и *высота* (или *толщина*). Да и само пространство, в котором мы живём, называется *трёхмерным*. Наличие *трёх* измерений является характерным признаком геометрического тела. Как это следует понимать?

У любого параллелепипеда нетрудно указать длину, ширину и высоту (рис. 1). Правда, что именно является длиной, шириной или высотой, зависит от договорённости. Это, например, может определяться положением параллелепипеда относительно поверхности земли, стола и др. Часто за длину мы принимаем наибольшее измерение, а под толщиной понимаем самое маленькое. Всё это не так уж важно. Главное — измерений ровно три.

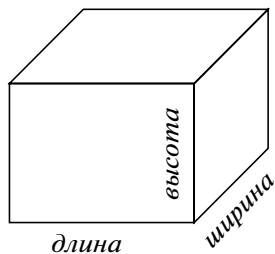
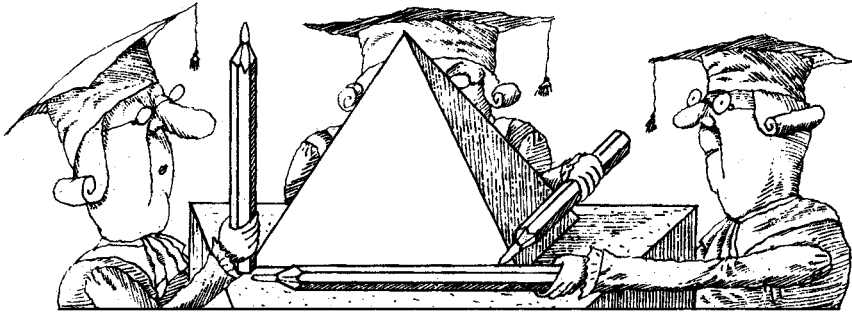


Рис. 1

А как быть, допустим, с конусом или каким-то совсем замысловатым телом? Ведь здесь невозможно указать три измерения, как для параллелепипеда. Что здесь длина и ширина, а что — толщина? В общем случае утверждение о наличии у тела трёх измерений означает лишь, что внутри него можно поместить параллелепипед, пусть очень небольшой, у которого, однако, все три измерения отличны от нуля.





А теперь решите несколько задач, выполните задания и ответьте на вопросы. (Начиная с этого момента, в конце каждого параграфа или главы вам будут предлагаться упражнения этих трёх видов.)

### ▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

.....



1. Рассмотрим встречающиеся буквально на каждом шагу предметы: книгу, консервную банку, карандаш, электрическую лампочку... (Назовите ещё несколько предметов самостоятельно.) Какие из известных вам геометрических тел по форме наиболее соответствуют перечисленным предметам? А быть может, их удобно рассматривать составленными из нескольких известных геометрических тел? Из каких? Дайте словесное описание этих тел.
2. Вспомните названия нескольких геометрических тел. Какие реальные тела соответствуют им по форме?
3. Нарисуйте известные вам геометрические тела: куб, различные пирамиды, цилиндр, конус, шар и др. Постарайтесь, чтобы изображаемые тела выглядели объёмными. Какое из тел, на ваш взгляд, наиболее неудобно для изображения?
4. Придумайте какое-нибудь интересное тело. Опишите его словами другим ученикам, а они должны понять, что вы имеете в виду, и изобразить придуманное тело.



5. Рассмотрите внимательно рисунок 2, *a—ж*. Опишите, как устроены изображённые на нём тела. Названия каких тел вам известны? Среди изображённых тел есть невозможные. Какие именно? Почему это так? Придумайте и нарисуйте какие-нибудь интересные тела, в том числе и невозможные.

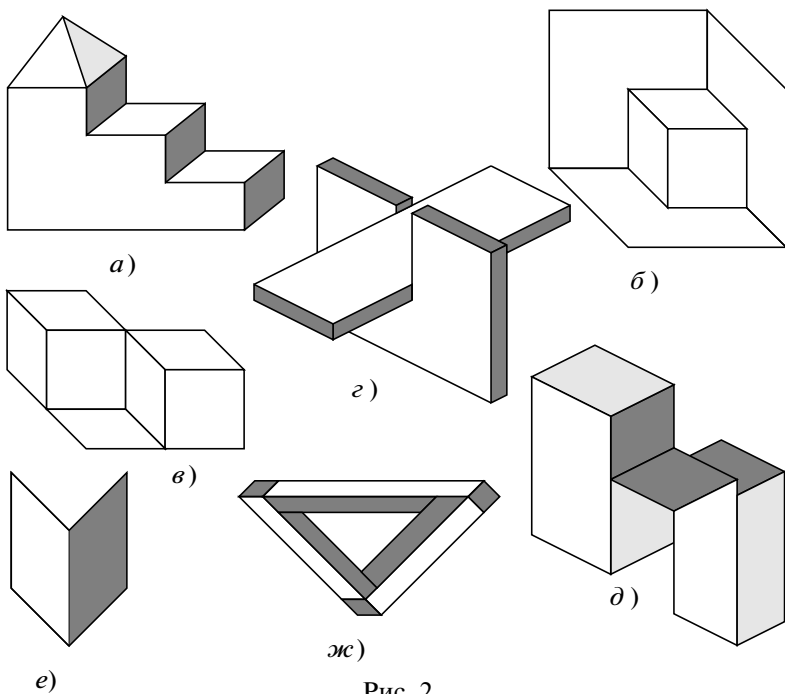


Рис. 2

6. Придумайте пробку, с помощью которой можно заткнуть любое из изображённых на рисунке 3 отверстий.

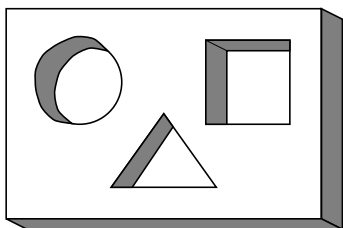


Рис. 3

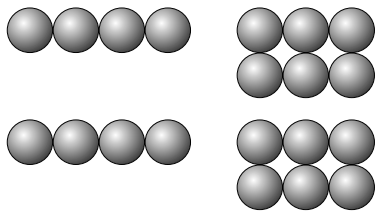


Рис. 4

7. Подумайте над следующей старинной головоломкой, которую иногда называют «египетская пирамидка». Имеется 20 одинаковых шариков, склеенных так, что получилось две «цепочки» по 4 шарика в каждой и два «прямоугольника» из 6 шариков со сторонами 2 и 3 шарика (рис. 4). Как сложить эти 4 набора, чтобы получилась составленная из шариков треугольная пирамида?

## 1.2. Поверхность

**i** Всякое геометрическое тело имеет *поверхность*, представляющую собой границу (оболочку) этого тела.

Поверхность геометрического тела делит всё пространство на две части: внутреннюю и внешнюю по отношению к этому телу. Чтобы попасть из любой точки, находящейся внутри тела, во внешнюю область, необходимо пересечь поверхность тела (рис. 5).

*Поверхность, ограничивающая шар, называется сферой* (рис. 6).

У всех других известных нам тел поверхности не имеют специальных названий.

Однако не всякая поверхность является границей какого-либо тела. Главное здесь то, что поверхность, в отличие от тела, имеет лишь *два измерения*: длину и ширину. Иными словами, никакое тело, каким бы маленьким оно ни было, нельзя расположить так, чтобы оно целиком принадлежало поверхности.

Конечно, в реальной жизни, в природе мы не встретим предметов, не имеющих толщины. Поэтому понятие поверхности *абстрактно*, является *математической абстракцией*. (*Абстрактный* в переводе с латинского означает *отвлечённый*). Абстрактное понятие означает что-либо мысленное, непредметное, существующее лишь в нашем воображении. К абстрактным

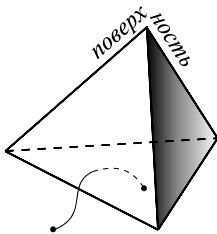


Рис. 5

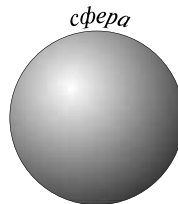


Рис. 6

следует отнести такие понятия, как красота, душа, мысль, скорость и многие другие.)

Говоря, что лист бумаги или мыльная плёнка являются поверхностями, мы подразумеваем, что их толщина ничтожно мала по сравнению с другими размерами. В жизни мы часто поступаем подобным образом. Например, говорим «фотография 9 на 12», «кусок ткани 2 м на 3 м». И никому не приходит в голову указать ещё и третий размер — толщину фотографии или ткани, хотя в отдельных случаях знание этой величины оказывается важным. Практически мы считаем их поверхностями и характеризуем двумя размерами — длиной и шириной.

**i** Многообразен и удивителен мир поверхностей. На рисунке 7 изображены некоторые интересные математические поверхности. Стоит обратить внимание на поверхности, изображённые в нижнем ряду. Они обладают на первый взгляд невозможным свойством — у них одна сторона. Оказывается, двигаясь вдоль этих поверхностей и нигде не переходя через край, можно вернуться в ту же точку, но с другой (по отношению к этой точке) стороны. Убедитесь в этом самостоятельно. Поверхность, изображённая на рисунке 7, *е*, называется *листом Мёбиуса*. Она названа так по имени открывшего её (вернее, его) немецкого математика Мёбиуса, жившего в XIX в. Говорят, что своё открытие он сделал, увидев ленту, которую служанка по оплошности неверно сшила. Сколько раз подобные оплошности совершали служанки, и не только они! Но никто до Мёбиуса не обращал внимания на удивительные свойства образовавшейся поверхности.

**i** Среди всех поверхностей выделим одну — *плоскость*, свойства которой и будем в дальнейшем изучать.

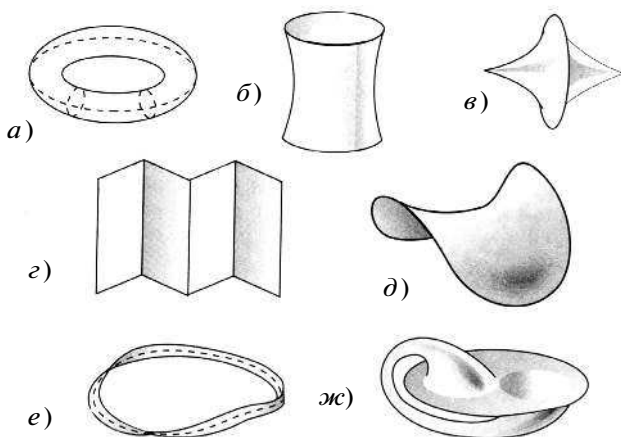
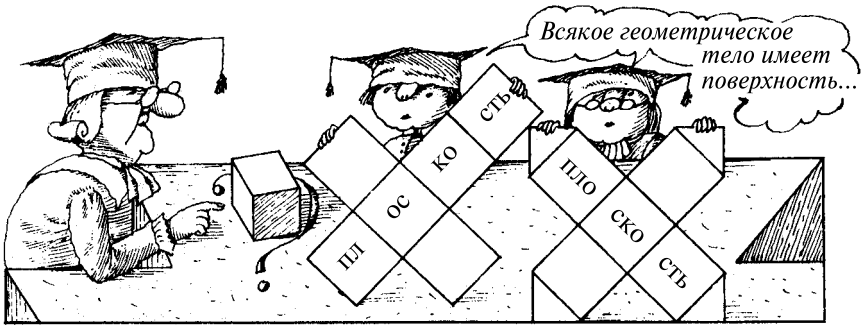


Рис. 7



Плоскость мы представляем себе бесконечной во всех направлениях. В окружающем нас мире без труда можно найти много примеров плоских поверхностей: поверхность конькобежного катка, оконное стекло, поверхность стола или пола, футбольное поле. Их практически можно рассматривать как плоские поверхности, части плоскости.

### ▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

Начиная с этого параграфа, мы будем выделять некоторые задачи. Буква «н» показывает, что задача начальная. Решение таких задач подготовит к восприятию более сложных задач. Буква «в» сопровождает важные задачи. Эти задачи надо непременно решить и хорошо усвоить либо метод решения, либо сообщаемый в них факт. Буква «п» означает, что задача полезная, буква «т» — трудная. Этими буквами обозначены задачи, предназначенные тем, кто хочет лучше овладеть теорией геометрии и научиться решать трудные задачи. Не удивляйтесь, что при выполнении части заданий вам потребуются знания из курса математики 5—6 классов, но пока без строгого обоснования.

- 8.** Склейте из бумаги поверхности, ограничивающие куб, треугольную пирамиду, треугольную призму (рис. 8).

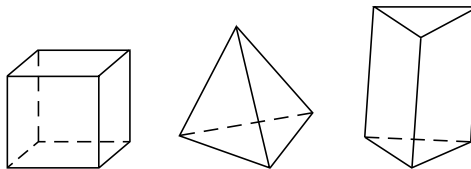


Рис. 8



9. Поверхность куба разрезали и развернули на плоскость. Получились фигуры, изображённые на рисунке 9, *a–в*. Как из них получить поверхность куба?

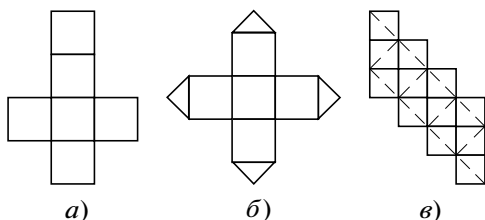


Рис. 9

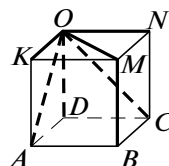


Рис. 10

10. Придумайте самостоятельно интересные развёртки куба.

- 11(н). Поверхность куба, изображённого на рисунке 10, разрезали по отрезкам  $OD$ ,  $OA$ ,  $OK$ ,  $OM$ ,  $ON$ ,  $OC$  и  $MB$  и развернули. Начертите получившуюся развёртку.

- 12(н). По каким рёбрам нужно разрезать куб (рис. 11), чтобы получить развёртку, представленную на рисунке 12?

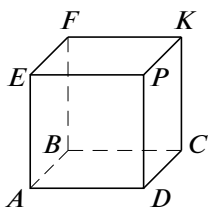


Рис. 11

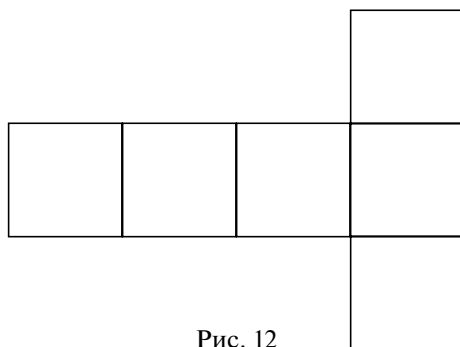


Рис. 12

13. Что получится, если поверхность треугольной пирамиды, у которой все рёбра равны, разрезать так, как показано на рисунке 13, и развернуть? (Разрезы идут по отрезкам  $BA$ ,  $CA$ ,  $KA$  и  $KD$ .) Придумайте другие интересные развёртки треугольной пирамиды.

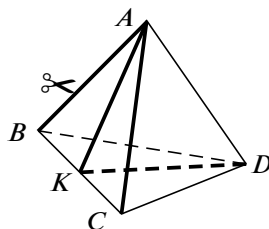


Рис. 13

- 14(н).** Из бумажного треугольника, все углы которого острые, сложите тетраэдр, т. е. треугольную пирамиду.
- 15.** Имеется квадратный лист бумаги. Сложите его так, чтобы получилась поверхность треугольной пирамиды.
- 16(н).** Какие многоугольники, изображённые на рисунке 14, можно считать развёртками правильного тетраэдра (треугольная пирамида, все грани которой — одинаковые треугольники с равными сторонами)? Почему?

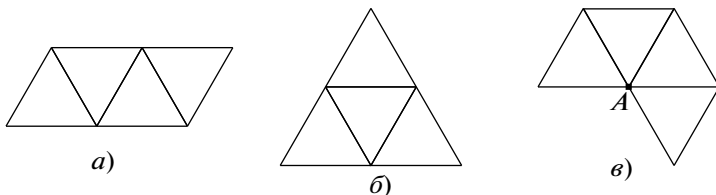


Рис. 14

- 17.** Что получится, если лист Мёбиуса разрезать вдоль штриховой линии, указанной на рисунке 7, *e*? Можно ли одним разрезом разрезать лист Мёбиуса на две части, которые, однако, нельзя разъединить?
- 18.** Художник изготовил для своей картины рамку. Он считает, что получившаяся рамка имеет прямоугольную форму. Каким образом это можно проверить? Достаточно ли убедиться в равенстве противоположных сторон? А если к равенству противоположных сторон добавить ещё и равенство диагоналей? Можно ли теперь быть уверенным в том, что рамка действительно имеет прямоугольную форму?
- 19.** Каким образом из листа бумаги можно изготовить поверхность цилиндра, конуса?
- 20(н).** Начертите развёртку цилиндра, если радиус его основания равен 5 см, а высота равна 10 см.
- 21.** Рассмотрим известные вам тела: параллелепипед, призму, цилиндр, конус, шар. Как вы думаете, поверхности каких из этих тел можно разрезать таким образом, чтобы их можно было положить на плоскость?
- 22.** Имеется ёмкость для воды: ведро, таз и т. п. Как проверить, что дно ёмкости плоское?