МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

Г. К. Муравин, О. В. Муравина

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

11 класс

Учебник

Рекомендовано Министерством просвещения Российской Федерации

8-е издание, стереотипное

Москва
ДРОФА
2020

российский учебник

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
М91

Муравин, Г. К.

М91 Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 11 кл. : учебник / Г. К. Муравин, О. В. Муравина. — 8-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2020. — 188, [4] с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-358-23250-1

Учебник входит в УМК по математике для 10—11 классов, изучающих предмет на базовом уровне. Теоретический материал разделён на обязательный и дополнительный, система заданий дифференцирована по уровню сложности, каждый пункт главы завершается контрольными вопросами и заданиями, а каждая глава — домашней контрольной работой. В учебник включены темы проектов и сделаны ссылки на интернет-ресурсы.

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего (полного) общего образования и включён в Федеральный перечень.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-358-23250-1

Оглавление

От авторов 5

Глава 1. Непрерывность и пределы функции

1. Непрерывность функции 7
2. Предел функции 15
3. Свойства пределов и асимптоты графика функции . . 20

Глава 2. Производная функции

4. Касательная к графику функции 28
5. Производная и дифференциал функции 34
6. Точки возрастания, убывания и экстремума функции 46

Глава 3. Техника дифференцирования

7. Производная суммы, произведения и частного функций 59
8. Производная сложной функции 67
9. Формулы производных основных функций 70
10. Наибольшее и наименьшее значения функции 78
11. Вторая производная 85

Глава 4. Интеграл и первообразная

12. Площадь криволинейной трапеции 93
13. Первообразная 100

Глава 5. Элементы теории вероятностей и статистики

14. Сумма и произведение событий 112
15. Понятие о статистике 122

Глава 6. Комплексные числа

16. Формула корней кубического уравнения 135
17. Действия с комплексными числами 138

Темы проектов 145

Заключение 146

Домашние контрольные работы 147

Ответы 153

Советы 162

Решения 166

Основные формулы 178

Предметный указатель 184

Список литературы и интернет-ресурсов 186

Уважаемые старшеклассники!

В этом году вы завершаете изучение школьного курса математики. Авторы постарались помочь вам изучить новый материал и повторить изученное ранее. Знать математику — значит уметь решать задачи. Именно задачи вам предстоит решать на ЕГЭ. В учебнике задачи разной степени трудности.

В задачах, номера которых не имеют обозначений, вы не должны испытать затруднений.

Значком «○» отмечены задания, в которых путь к ответу, как правило, связан с небольшими техническими сложностями.

Задачи, над которыми следует подумать, имеют обозначение «●». План решения таких задач полезно обсудить в классе с учителем.

Символом «*» обозначены самые трудные задачи.

Значком «■» отмечены задания, которые следует выполнять с помощью калькулятора. В учебнике рассматривается калькулятор операционной системы Windows.

При изучении математики вам предстоит строить много графиков. В некоторых случаях работу в тетради полезно совмещать, а иногда и заменять работой на компьютере в одной из компьютерных программ построения и исследования графиков функций и уравнений. Такие программы свободно и бесплатно распространяются в Интернете. Мы рекомендуем две русифицированные программы GeoGebra и WinPlot.

В тексте учебника рекомендация использовать какую-нибудь компьютерную программу обозначается символом .

Выполненные в этих программах решения задач красивы и наглядны. Многие из них размещены школьниками и учителями математики в Интернете, где их можно поискать. Надеемся, что и ваши решения можно будет там найти.

Вместе с основным материалом, изучение которого обязательно, в учебнике есть и дополнительный материал, знакомство с которым желательно. Начало дополнительного материала обозначается «▼», а конец «△».

В разделе «Основные формулы» в конце учебника вы можете найти нужную формулу.

Решив задачу, сравните свой ответ с ответом в учебнике. Если выполнить задание вы не можете, то прочитайте совет к задаче или посмотрите её решение. В этом вам помогут разделы «Ответы», «Советы» и «Решения».

Каждый пункт учебника завершается контрольными вопросами и заданиями, а к главам учебника предлагаются домашние контрольные работы с указанием примерного времени, на которое рассчитано их выполнение.

Задания домашних контрольных работ разбиты на три уровня, которые соответствуют удовлетворительной, хорошей и отличной оценке, так что вы сами сможете оценить свои математические достижения.

Если вы можете ответить на контрольные вопросы, справляетесь с контрольными заданиями и выполнили домашнюю контрольную работу, значит, материал вами усвоен.

В конце учебника имеется предметный указатель, особенно полезный при повторении.

В учебник не вошли многие важные и интересные математические вопросы, поэтому для тех, кто интересуется математикой, в справочном разделе учебника имеется список дополнительной литературы и интернет-ресурсов.

Глава 1

НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИИ

В первом пункте этой главы речь пойдёт о различии между описательно-интуитивными и строгими математическими определениями, во втором пункте вы познакомитесь с важнейшим математическим понятием предела функции, а в третьем пункте вычисление пределов позволит более точно строить графики функций.

1. Непрерывность функции

В 10 классе вы познакомились с терминами «непрерывность функции», «промежуток непрерывности функции» и «точка разрыва функции». На рисунке 1 изображён график непрерывной функции $y = x^2$.

Кусочно-заданная функция $y = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ -1 \text{ при } x < 0 \end{cases}$ (рис. 2),

известная в математике как функция $y = \operatorname{sign} x$[1], имеет разрыв в точке $x = 0$.

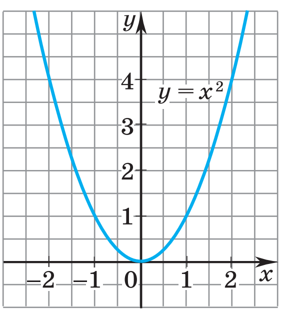

Рис. 1

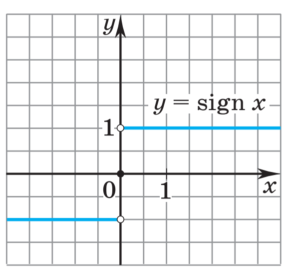

Рис. 2

[1] *Функция сигнум* (sign — сокращение латинского слова *signum* — знак) была введена немецким математиком, иностранным членом-корреспондентом Петербургской академии наук Л. Кронекером в 1878 г.

Первый из графиков можно изобразить, не отрывая карандаш от бумаги, а при изображении второго карандаш придётся оторвать. Именно на этом основывалось начальное представление о непрерывности функций, которым вы пользовались в 10 классе. Так, в частности, свойство сохранять знак, которым обладает непрерывная функция, не обращающаяся в нуль на промежутке, позволяло решать неравенства методом интервалов.

Пример 1. Решить неравенство $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{\log_2(2x+3) - 3} \leqslant 0.$

Решение.

1 Найдём границы промежутков знакопостоянства функции, заданной левой частью неравенства. К этим границам относятся нули числителя, нуль знаменателя, и, конечно, сами промежутки должны входить в ОДЗ неравенства (область допустимых значений переменной x).

ОДЗ: $\log_2(2x+3) - 3 \neq 0,\quad \begin{cases} 2x+3 > 0, \\ 2x+3 \neq 8, \end{cases}\quad \begin{cases} x > -1{,}5, \\ x \neq 2{,}5. \end{cases}$

Нули числителя: $x^2 - 3x - 4 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

Нуль знаменателя: $x = 2{,}5$.

2 Отметим найденные границы с учётом нестрогости данного неравенства (рис. 3, *а*).

3 Определим знаки функции на отмеченных промежутках и проведём кривую знаков.

На самом правом промежутке положителен и числитель, и знаменатель дроби, а при переходе через точки 4, 2,5 и −1

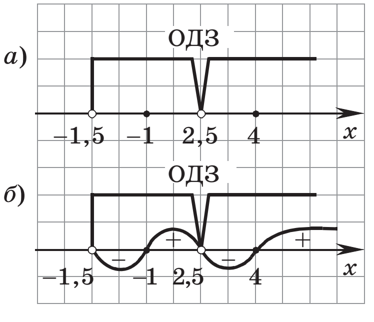

Рис. 3

или числитель, или знаменатель свой знак изменяют, что влечёт изменение знака функции (рис. 3, *б*).

Ответ: $-1,5 < x \leqslant -1$; $2,5 < x \leqslant 4$.

Образного представления о непрерывности было вполне достаточно для решения задач, в которых речь идёт об *элементарных функциях*[1]. Однако переход к более сложным числовым функциям заставил математиков задуматься над проблемой строгости своей науки, и в частности уточнить определение непрерывности. Ведь, говоря о непрерывности, мы оперируем неким описательным понятием *возможности изображения карандашом*. Однако здравый смысл подсказывает, что уже первый из упомянутых в этом пункте графиков, график функции $y = x^2$, изобразить карандашом нельзя, поскольку он бесконечен, а изображаем мы лишь его часть. Но если график нельзя изобразить, то вопрос о том, как именно его нельзя изобразить, теряет смысл.

Проблема бесконечности не возникает, если рассматривать *непрерывность функции в точках*, т. е. на небольших участках в ближайших окрестностях точек графика. Понятно, что в точках, где функция не существует, не возникает и вопроса о её непрерывности.

В точке x_0 функция $y = f(x)$ может оказаться непрерывной (рис. 4) или иметь в ней разрыв (рис. 5).

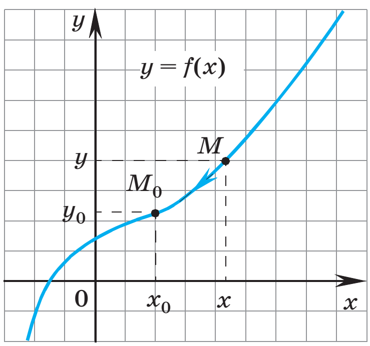

Рис. 4

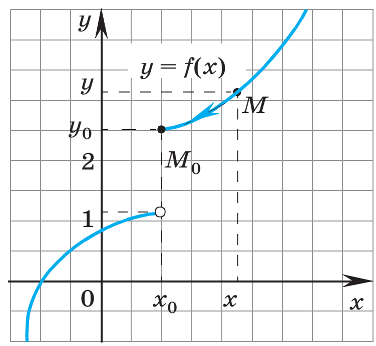

Рис. 5

[1] Напомним, что к элементарным относятся функции, задаваемые формулами, содержащими степени, радикалы, логарифмы, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, а также дроби и арифметические знаки действий.

На рисунке 4 точка $M(x; y)$, изображающая остриё грифеля карандаша, двигаясь по графику функции, *может* оказаться *как угодно близко* к точке $M_0(x_0; y_0)$. При этом всё меньше и меньше будут отличаться друг от друга как абсциссы точек M и M_0, так и их ординаты.

Легко видеть, что в случае разрыва функции (рис. 5), в точке x_0, как бы близко слева от этой точки мы ни брали x, разность $f(x) - f(x_0)$ останется больше некоторого положительного числа (в частности, на рисунке 5 — больше 1).

Используя понятие непрерывности в точке, можно говорить и о непрерывности функции на промежутке.

Функция, непрерывная во всех точках промежутка, является на этом промежутке **непрерывной**.

Такой подход к понятию непрерывности функции независимо друг от друга предложили в начале XIX в. французский математик Огюстен Луи Коши (1789—1857) и чешский математик Бернард Больцано (1783—1848).

Элементарные функции непрерывны в любой точке своей области определения, поэтому они могут иметь разрывы только в точках, ограничивающих их область определения, но не входящих в неё.

На рисунках 6 и 7 показаны графики двух элементарных функций, которые разрываются точками, не входящими в

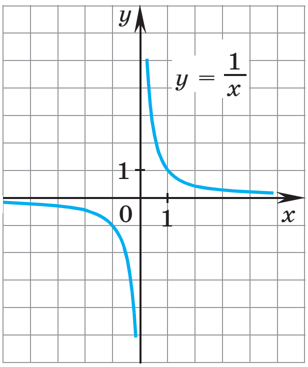

Рис. 6

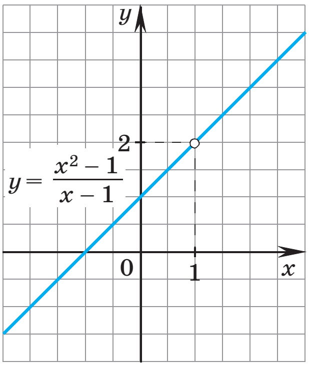

Рис. 7

области их определения. На рисунке 6 хорошо вам известная гипербола $y = \frac{1}{x}$, а на рисунке 7 вы видите график функции $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, который при всех x, кроме $x = 1$, совпадает с графиком линейной функции $y = x + 1$. Подумайте, почему в отличие от *бесконечного разрыва* функции $y = \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 0$ разрыв функции $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ в точке $x_0 = 1$ называют *устранимым*.

Пример 2. Устранить разрыв функции

$$y = \frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{x - 1}.$$

Решение. Данная функция имеет *разрыв в точке* $x = 1$. Устранить разрыв — это значит найти функцию, непрерывную в точке $x = 1$ и совпадающую с функцией $y = \frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{x - 1}$ во всех других точках.

Преобразуем выражение, задающее функцию:

$$\frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{x - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}.$$

Функция $y = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}$ совпадает с функцией $y = \frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{x - 1}$ при всех значениях аргумента, кроме $x = 1$, и является элементарной, а значит, непрерывной во всех точках своей области определения, в частности в точке $x = 1$.

Ответ: $y = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}$.

Упражнения

1. Среди указанных функций найдите функции, имеющие разрывы. Укажите точки разрыва:

1) $y = x^5 + x^3 + 7$;

2) $y = 5x + \frac{1}{x}$;

3) $y = \operatorname{tg} x$;

4) $y = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ 2x & \text{при } x > 0; \end{cases}$

5) $y = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$;

6) $y = 3^x + \lg x$;

7) $y = \frac{|x+5|}{2^x}$;

8) $y = \sin x - \cos^2 x$;

9) $y = \begin{cases} x + 2 & \text{при } x < -1, \\ x^2 & \text{при } -1 \leqslant x < 2, \\ 5 - x & \text{при } x \geqslant 2. \end{cases}$

2. 1) Сформулируйте условие, достаточное для того, чтобы непрерывная функция имела нуль на отрезке $[a; b]$.
2) ● Используйте это условие для составления плана поиска на отрезке $[4; 5]$ приближённого значения корня уравнения

$$x^3 - 2x^2 - 8x - 12 = 0.$$

3) ■ Действуя по составленному плану, найдите с помощью калькулятора корень с точностью до 0,01.

3. Решите методом интервалов неравенство:

1) $(x^2 - 4)(x^2 - 9) > 0$;

2) $\frac{(x-1)(x+2)}{2x-1} < 0$;

3) $\frac{3x^2 - 2x - 1}{4 + 3x - x^2} > 0$;

4) $\frac{\sqrt{2x-5}}{x+3} < 0$.

4. Приведите примеры функций, непрерывных:
1) на множестве действительных чисел;
2) при всех значениях x, кроме $x = 4$;
3) при всех значениях x, кроме x, равных 1, 2 и 3.

5.○ В результате каких преобразований из графика функции $y = f(x)$ получится график функции:

1) $y = f(x + a)$;
2) $y = f(x) + b$;
3) $y = f(kx + b)$;
4) $y = kf(x) + b$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = |f(x + a)|$?

6. Постройте график функции:

1) $y = 2x^2 - 1$;

2) $y = 2^x - 2$;

3) $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

4) $y = 2\cos x + 1$.

7. На рисунке 8 изображены графики функций.

1) Какие из этих функций:

а) непрерывны; б) разрывны; в) имеют устранимые разрывы?

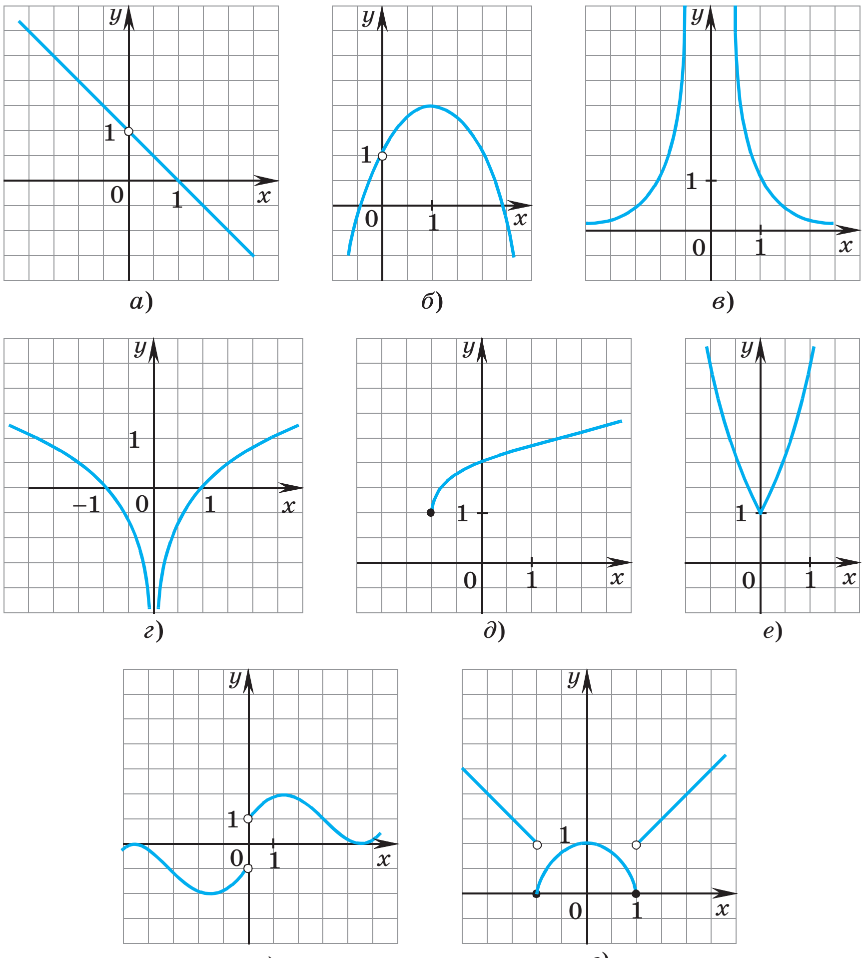

Рис. 8

2) Найдите для каждого графика, если возможно, соответствующую ему функцию из следующего списка:

$$y = \frac{x - x^2}{x},\quad y = \begin{cases} 1 - x^2 \text{ при } |x| \leqslant 1, \\ |x| \text{ при } |x| > 1, \end{cases}\quad y = 1 + \sqrt{x+1},$$

$$y = \log_2|x|,\quad y = \frac{x + 2x^2 - x^3}{x},\quad y = (|x|+1)^2,\quad y = \sin x + \frac{|x|}{x}.$$

8. Как называется $|x - x_0|$, если x_0 — приближённое значение x?

9. Используя геометрическую интерпретацию модуля разности на координатной прямой, решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} |x-2| < 0{,}6, \\ |x-1| < 0{,}7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} |x+2| < 0{,}7, \\ |x+1| < 0{,}6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} |x-2| > 0{,}6, \\ |x-1| < 0{,}7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} |x+2| < 0{,}6, \\ |x+1| > 0{,}7. \end{cases}$

10. Устраните разрыв функции:

1) $y = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 4x^2}{x^2}$;

2) $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$;

3) $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{3 - x}$;

4) $y = \dfrac{(x^2 + x - 2)(x + 3)}{x^2 + 2x - 3}$;

5) $y = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$;

6) $y = \dfrac{64 - x^2}{2 - \sqrt[3]{x}}$.

11. 1) Найдите область определения и точки разрыва функции:

а) $y = \dfrac{2x + 6}{x^2 - 9}$;

б) $y = \dfrac{x^2}{x^3 - 2x^2 - 8x}$;

в) $y = \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\cos x}$;

г) $y = \dfrac{1}{1 - x}$;

д) $y = \dfrac{x - 9}{3 - \sqrt{x}}$;

е) $y = \dfrac{1 - x}{1 - \sqrt[4]{x}}$.

2) Есть ли среди разрывов: а) бесконечные; б) устранимые?

12. Задайте формулой функцию, совпадающую с функцией $y = 3^x$ во всех точках, кроме $x = 2$.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте известные вам свойства функций, связанные с их непрерывностью.

2. Изобразите график функции, имеющей в точке $x_0 = 1$: а) бесконечный разрыв; б) устранимый разрыв. Задайте аналитически какую-нибудь функцию, имеющую устранимый разрыв в этой точке, и функцию, которая получится после устранения этого разрыва.

3. Решите неравенство $\dfrac{2x^2 + 3x - 5}{3x^2 - x - 2} \leqslant 0$.

2. Предел функции

Функции, графики которых изображены на рисунках 9 и 10, отличаются только наличием или отсутствием значения в точке x_0. Точка $M(x; y)$, двигаясь по любому из графиков, *может* оказаться *как угодно близко* к точке $M_0(x_0; y_0)$. Независимо от того, принадлежит ли точка M_0 графику функции (как на рис. 9) или нет (как на рис. 10), при приближении абсциссы точки M к x_0 её ордината $f(x)$ становится как угодно близка к y_0. Можно сказать, что, когда x *стремится* к x_0, $f(x)$ *стремится* к y_0.

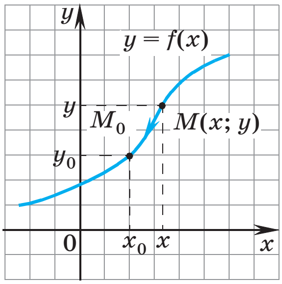

Рис. 9

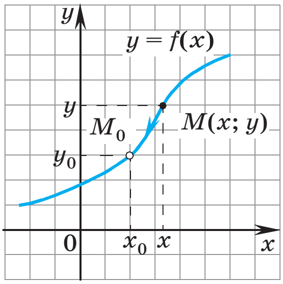

Рис. 10

Глагол «стремится» в русском языке обычно означает процесс приближения к некоторой цели, но не само её достижение. Точно так же *«x стремится к x_0»* означает, что x принимает значения как угодно близкие, *но не равные* x_0. Правда, по отношению к $f(x)$ такого ограничения нет — в процессе своего *стремления* $f(x)$ может принимать значения, равные y_0.