Алгоритм успеха

А. Г. Мерзляк
В. М. Поляков

АЛГЕБРА

9 класс

Учебник

Под редакцией В. Е. Подольского

2-е издание, переработанное

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2016

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я726
М52

Учебник соответствует Примерной основной образовательной программе основного общего образования и включён в Федеральный перечень

Под редакцией проректора МГУ им. М. В. Ломоносова, доктора физико-математических наук В. Е. Подольского

Мерзляк, А. Г.

М52 Алгебра : 9 класс : учебник / А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков ; под ред. В. Е. Подольского. — 2-е изд., перераб. — М. : Вентана-Граф, 2016. — 400 с. : ил.

ISBN 978-5-360-07732-9

Учебник предназначен для углублённого изучения алгебры в 9 классе и входит в комплект из трёх книг: «Алгебра. 7 класс», «Алгебра. 8 класс», «Алгебра. 9 класс» (авт. А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков) системы «Алгоритм успеха».

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я726

ISBN 978-5-360-07732-9

Условные обозначения

◆

Простые задачи

◆ ◆

Задачи средней сложности

◆ ◆ ◆

Сложные задачи

Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

Окончание доказательства теоремы

Окончание решения задачи

5.6. Задания, рекомендованные для устной работы

5.7. Задания, рекомендованные для домашней работы глава

1 Квадратичная функция

- В этой главе вы повторите и расширите свои знания о функции и её свойствах.
- Вы научитесь, используя график функции $y = f(x)$, строить графики функций $y = kf(x)$, $y = f(kx)$, $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$.
- Вы узнаете, какую функцию называют квадратичной, какая фигура является её графиком, изучите свойства квадратичной функции.
- Вы научитесь применять свойства квадратичной функции.

§ 1 Функция

В повседневной жизни нам часто приходится наблюдать процессы, в которых изменение одной величины (независимой переменной) влечёт за собой изменение другой величины (зависимой переменной). Изучение этих процессов требует создания их математических моделей. Одной из таких важнейших моделей является **функция.**

С этим понятием вы ознакомились в курсе алгебры 7 класса. Напомним и уточним основные сведения.

Пусть X — множество значений независимой переменной, Y — множество значений зависимой переменной. Функция — это правило, с помощью которого по каждому значению независимой переменной из множества X можно найти единственное значение зависимой переменной из множества Y.

Другими словами, **функция — это правило, которое каждому элементу множества X ставит в соответствие единственный элемент множества Y.**

Обычно **независимую переменную** обозначают буквой x, **зависимую** — буквой y, **функцию** (правило) — буквой f.

Если рассматривают функцию f с независимой переменной x и зависимой переменной y, то говорят, что переменная y **функционально зависит** от переменной x. Этот факт обозначают так: $y = f(x)$.

Независимую переменную ещё называют **аргументом функции.**

Множество всех значений, которые принимает аргумент, т. е. множество X, называют **областью определения функции** и обозначают $D(f)$ или $D(y)$.

Так, областью определения обратной пропорциональности $y = \dfrac{1}{x}$ является множество $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. Также можно записать $D(y) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \neq 0\}$ или $D(y) = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$.

Значение зависимой переменной ещё называют **значением функции.** Значение функции f, которое соответствует значению x_0 аргумента x, обозначают $f(x_0)$. Например, $f(7)$ — это значение функции при $x = 7$. Также принято называть число $f(x_0)$ **значением функции f в точке x_0.**

Множество всех значений, которые принимает зависимая переменная, т. е. множество Y, называют **областью значений функции** и обозначают $E(f)$ или $E(y)$. Так, областью значений функции $y = \sqrt{x}$ является промежуток $[0;\ +\infty)$, т. е. $E(y) = [0;\ +\infty)$.

Элементами множеств $D(f)$ и $E(f)$ могут быть объекты самой разнообразной природы.

Так, если каждому многоугольнику поставить в соответствие его площадь, то можно говорить о функции, область определения которой — множество многоугольников, а область значений — множество положительных чисел.

Если каждому человеку поставить в соответствие день недели, в который он родился, то можно говорить о функции, область определения которой — множество людей, а область значений — множество дней недели.

В случае, когда $D(f) \subset \boldsymbol{R}$ и $E(f) \subset \boldsymbol{R}$, функцию f называют **числовой.**

Если областью определения функции f является множество X, а областью значений — множество Y, то функцию f также называют **отображением множества X на множество Y.** Слова «отображение» и «функция» — синонимы. Однако термин «отображение» чаще используют тогда, когда при задании функции хотят подчеркнуть, какие множества являются областью определения и областью значений. Например, нумерация элементов некоторого счётного множества A — это отображение множества $\boldsymbol{N}$ на множество $\boldsymbol{A}$.

На рисунке 1.1 проиллюстрировано отображение множества X на множество Y (точками показаны элементы множеств). В отображении f

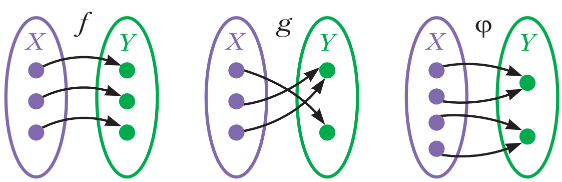

Рис. **1.1**

каждый элемент множества Y является соответствующим некоторому единственному элементу множества X. Такое отображение называют **взаимно однозначным отображением множества X на множество Y.** Отображения g и φ не являются взаимно однозначными отображениями множества X на множество Y.

Например, функция $y = \sqrt{x-1}$ является взаимно однозначным отображением множества $X = [1; +\infty)$ на множество $Y = [0; +\infty)$. Заметим, что функция $y = x^2$ не является взаимно однозначным отображением множества $X = \boldsymbol{R}$ на множество $Y = [0; +\infty)$. Действительно, например, элемент 4 множества Y является соответствующим двум элементам, –2 и 2, множества X.

Функцию считают заданной, если указаны её область определения и правило, с помощью которого можно по каждому значению независимой переменной найти значение зависимой переменной.

Функцию можно задать одним из следующих способов:

- описательно;
- с помощью формулы;
- с помощью таблицы;
- графически.

Рассмотрим несколько примеров функций, заданных описательно.

1. Каждому рациональному числу поставим в соответствие число 1, а каждому иррациональному — число 0. Функцию, заданную таким образом, называют **функцией Дирихле** и обозначают $y = \mathfrak{D}(x)$. Пишут:

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in \boldsymbol{Q}, \\ 0, \text{ если } x \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}. \end{cases}$$

Заметим, что $D(y) = \boldsymbol{R}$, $E(y) = \{0, 1\}$.

2. Каждому действительному числу x поставим в соответствие наибольшее целое число, не превосходящее число x. Из курса алгебры 7 класса вы знаете, что заданную функцию называют **целой частью числа** x и обозначают $f(x) = [x]$. Например, $f\left(\sqrt{2}\right) = \left[\sqrt{2}\right] = 1$, $f(2) = [2] = 2$, $f\left(-\sqrt{2}\right) = \left[-\sqrt{2}\right] = -2$. Заметим, что $D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = \boldsymbol{Z}$.

3. Каждому действительному числу x поставим в соответствие разность между этим числом и его целой частью. Заданную функцию называют **дробной частью числа** x и обозначают $f(x) = \{x\}$. Имеем: $\{x\} = x - [x]$. Например, $f\left(\sqrt{2}\right) = \left\{\sqrt{2}\right\} = \sqrt{2} - \left[\sqrt{2}\right] = \sqrt{2} - 1$, $f(2) = \{2\} = 2 - [2] = 2 - 2 = 0$, $f\left(-\sqrt{2}\right) = \left\{-\sqrt{2}\right\} = -\sqrt{2} - \left[-\sqrt{2}\right] = -\sqrt{2} - (-2) = 2 - \sqrt{2}$. Заметим, что $D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = [0; 1)$.

4. Каждому отрицательному действительному числу поставим в соответствие число –1, каждому положительному действительному числу — число 1, нулю — число 0. Функцию, заданную таким образом, называют **сигнум** (от лат. *signum* — «знак») и обозначают $y = \operatorname{sgn} x$. Пишут:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, \text{ если } x < 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ 1, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Заметим, что $D(y) = \boldsymbol{R}$, $E(y) = \{-1,\ 0,\ 1\}$.

Значение этой функции характеризует знак соответствующего аргумента.

Легко проверить справедливость следующего равенства: $x \cdot \operatorname{sgn} x = |x|$. Сделайте это самостоятельно.

5. Рассмотрим функцию f, у которой $D(f) = \boldsymbol{N}$. Будем считать, что $f(n) = 1$, если десятичная запись числа π содержит n цифр 4, идущих подряд, и $f(n) = 0$, если эта запись таким свойством не обладает. Обратим внимание на то, что значения функции f вычислять нелегко. Например, мы не знаем, чему равно $f(10\,000\,000\,000)$. Однако область определения и правило заданы, следовательно, заданной является и сама функция.

Чаще всего функцию задают с помощью формулы. Если при этом не указана область определения, то считают, что областью определения функции является множество значений аргумента, при которых формула имеет смысл.

Например, если функция задана формулой $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, то её областью определения является область определения выражения $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, т. е. промежуток $(1; +\infty)$.

Значения одной функции могут служить значениями аргумента другой функции.

Например, рассмотрим функции $f(x) = 2x - 1$ и $g(x) = x^2 + x + 1$. Тогда $f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2(x^2 + x + 1) - 1 = 2x^2 + 2x + 1$. Следовательно, можно говорить, что формула $y = 2x^2 + 2x + 1$ задаёт функцию $y = f(g(x))$.

Если для любого $x \in M$ все значения функции g служат значениями аргумента функции f, то говорят, что задана **сложная функция** $y = f(g(x))$ с областью определения M.

Существуют функции, которые на разных подмножествах области определения задаются разными формулами. Например,

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \leqslant 1, \\ 2x - 1, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

Такие функции называют **кусочно заданными**.

Способ задания функции одной или несколькими формулами называют **аналитическим**.

В тех случаях, когда область определения функции является конечным множеством и количество его элементов не очень велико, удобно использовать табличный способ задания функции. Этот способ довольно часто применяют на практике. Так, результатом записи наблюдений за какой-либо характеристикой процесса (температурой, скоростью, давлением и т. п.) является таблица, задающая функциональную зависимость этой величины от времени.

Определение

Графиком числовой функции называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Сказанное означает, что *если некоторая фигура является графиком функции f, то выполняются два условия*:

1) если x_0 — некоторое значение аргумента, а $f(x_0)$ — соответствующее значение функции, то точка с координатами $(x_0; f(x_0))$ принадлежит графику;

2) если $(x_0; y_0)$ — координаты произвольной точки графика, то x_0 и y_0 — соответствующие значения независимой и зависимой переменных функции f, т. е. $y_0 = f(x_0)$.

Фигура на координатной плоскости может быть графиком некоторой функции, если любая прямая, перпендикулярная оси абсцисс, имеет с этой фигурой не более одной общей точки. Например, окружность не может служить графиком никакой функции.

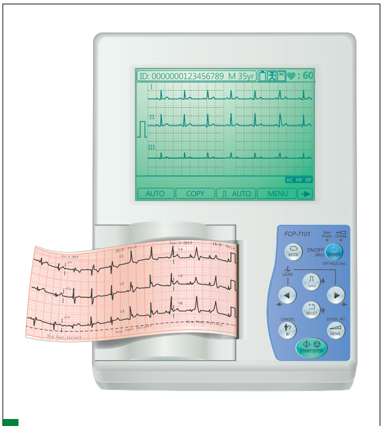

Рис. 1.2

Графический способ задания функции широко используется при исследовании реальных процессов. Существуют приборы, выдающие обработанную информацию в виде графиков. Так, в медицине используют электрокардиограф (рис. 1.2). Этот прибор рисует кривые, характеризующие работу сердца.

Пример 1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{x^2(x-1)}$.

Решение. Область определения данной функции — это множество решений неравенства $x^2(x-1) \geqslant 0$.

Это неравенство равносильно совокупности $\left[\begin{aligned} &x^2 = 0, \\ &x - 1 \geqslant 0. \end{aligned}\right.$

Решением этой совокупности является множество $\{0\} \cup [1; +\infty)$.

Ответ: $D(y) = \{0\} \cup [1; +\infty)$. ■

Пример 2. Найдите область значений функции $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Решение. Пусть a — произвольный элемент области значений данной функции, т. е. $a \in E(y)$. Тогда задача сводится к нахождению всех значений параметра a, при которых уравнение $\dfrac{2x}{1 + x^2} = a$ имеет решения.

Это уравнение равносильно такому:

$2x = a + ax^2$, откуда $ax^2 - 2x + a = 0$.

Если $a = 0$, то полученное уравнение имеет корень $x = 0$. Следовательно, число 0 входит в область значения функции.

Если $a \neq 0$, то это уравнение является квадратным и наличие корней определяется условием $D \geqslant 0$.

Имеем: $D = 4 - 4a^2$. Остаётся решить неравенство $4 - 4a^2 \geqslant 0$. Имеем:

$$4a^2 \leqslant 4,\ a^2 \leqslant 1,\ |a| \leqslant 1.$$

Решением последнего неравенства является промежуток $[-1; 1]$.

Следовательно, $E(y) = [-1; 1]$.

Ответ: $E(y) = [-1; 1]$. ■

Пример 3. Постройте график функции $y = \{x\}$.

Решение. Сначала докажем важные свойства целой и дробной частей числа.

1) Если $k \in \boldsymbol{Z}$, то $[x + k] = [x] + k$.

Пусть $[x] = c$. Тогда по определению целой части числа $c \leqslant x < c + 1$. Отсюда $c + k \leqslant x + k < (c + k) + 1$. Следовательно, $[x + k] = c + k = [x] + k$.

2) Если $k \in \boldsymbol{Z}$, то $\{x + k\} = \{x\}$.

Имеем: $\{x + k\} = x + k - [x + k] = x + k - ([x] + k) = x - [x] = \{x\}$.

Доказанное свойство дробной части числа показывает, что значение функции $y = \{x\}$ не изменится, если к её аргументу прибавить целое число. А этот факт, в свою очередь, позволяет утверждать, что на каждом из промежутков вида $[k; k + 1)$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, график функции $y = \{x\}$ имеет одинаковый вид. Поэтому достаточно построить его, например, на промежутке $[0; 1)$, а потом полученную фигуру «размножить».

Если $x \in [0; 1)$, то $[x] = 0$ и $\{x\} = x - [x] = x$, т. е. при $x \in [0; 1)$ имеем $y = x$.

Искомый график изображён на рисунке 1.3. ■

Обратим внимание, что свойство 2 функции $y = \{x\}$ позволяет отнести эту функцию к классу так называемых **периодических функций**. Говорят, что любое целое число, отличное от нуля, является её периодом. Более подробно с периодическими функциями вы ознакомитесь в 10 классе.

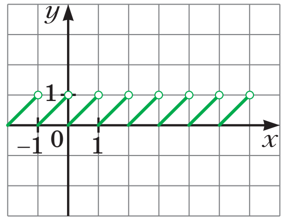

Рис. **1.3**

Пример 4. Найдите все функции f такие, что $D(f) = \boldsymbol{R}$ и для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $f(2x - 1) = x^2$.

Решение. Пусть $2x - 1 = t$. Поскольку переменная x принимает любые действительные значения, то и переменная t тоже принимает любые действительные значения. Имеем: $x = \frac{t+1}{2}$. Тогда $f(t) = \left(\frac{t+1}{2}\right)^2$ для любого $t \in \boldsymbol{R}$.

Мы установили, что если функция f, удовлетворяющая условию $f(2x - 1) = x^2$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$, существует, то она имеет вид $f(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$. Осталось показать, что найденная функция удовлетворяет условию задачи.

Имеем: $D(f) = \boldsymbol{R}$ и $f(2x-1) = \left(\frac{(2x-1)+1}{2}\right)^2 = x^2$.

Ответ: $f(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$. ■

?

1. Что называют функцией?

2. Как записывают, что переменная y функционально зависит от переменной x?

3. Что называют аргументом функции?

4. Что называют областью определения функции и как её обозначают?

5. Что называют значением функции?

6. Что называют областью значений функции и как её обозначают?

7. Какую функцию называют числовой?

8. Что называют отображением множества X на множество Y?

9. Какое отображение называют взаимно однозначным отображением множества X на множество Y?

10. Что надо указать, чтобы функция считалась заданной?

11. Назовите способы задания функции.

12. Что называют графиком функции?

Упражнения

1.1. Каждому натуральному числу, которое больше 10, но меньше 20, поставили в соответствие остаток от деления этого числа на 5.
1) Каким способом задана эта функция?
2) Какова область значений этой функции?
3) Задайте эту функцию таблично.

1.2. Заполните таблицу.

Значение аргумента x	Значение функции		
	$f(x) = [x]$	$g(x) = \{x\}$	$\varphi(x) = \mathfrak{D}(x)$
3,2			
–3,2			
$\sqrt{3}$			
$-\sqrt{3}$			

1.3. Найдите, не выполняя построения, точки пересечения графика функции с осями координат:

1) $f(x) = \dfrac{20 + 4x}{3x - 5}$; 2) $\varphi(x) = x^2 + 2x - 3$.

1.4. Найдите, не выполняя построения, точки пересечения графика функции с осями координат:

1) $h(x) = 9 - 10x$; 2) $p(x) = 4x^2 + x - 3$; 3) $s(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$.

1.5. Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} 9, \text{ если } x \leqslant -3, \\ x^2, \text{ если } -3 < x < 1, \\ x, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$

1.6. Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{x}, \text{ если } x < -2, \\ -x, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

1.7. Постройте график функции $y = \operatorname{sgn} x$.

1.8. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \dfrac{x}{|x| - 7}$; 2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}} + \dfrac{4x-3}{x^2 - 7x + 6}$.

1.9. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{x+4} + \dfrac{2}{x+1}$; 2) $f(x) = \sqrt{8-x} + \dfrac{4}{x^2 - 8x}$.

1.10. Найдите область значений функции:

1) $f(x) = \sqrt{x} - 1$; 4) $f(x) = |x + 2| + 2$;

2) $f(x) = 5 - x^2$; 5) $f(x) = \sqrt{-x^2}$;

3) $f(x) = -7$; 6) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$.

1.11. Найдите область значений функции:

1) $f(x) = x^2 + 3$; 2) $f(x) = 6 - \sqrt{x}$; 3) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$.

1.12. Какая из функций является взаимно однозначным отображением множества $D(y)$ на множество $E(y)$:

1) $y = 2x + 1$; 2) $y = |x|$; 3) $y = \sqrt{x}$?

1.13. Какая из функций является взаимно однозначным отображением множества $D(y)$ на множество $E(y)$:

1) $y = \dfrac{1}{x}$; 2) $y = x^2 + 1$; 3) $y = 2$?

1.14. Каждому многоугольнику поставили в соответствие его периметр. Является ли описанное отображение множества многоугольников на множество положительных действительных чисел взаимно однозначным?

1.15. Даны функции $f(x) = 1 - 3x$ и $g(x) = x^2 - 1$. Задайте формулой функцию:

1) $y = f(x + 1)$; 2) $y = g(f(x))$; 3) $y = f(f(x))$.

1.16. Даны функции $f(x) = \sqrt{x+1}$ и $g(x) = x^2 - 2x$. Задайте формулой функцию:

1) $y = g(-x)$; 2) $y = f(g(x))$; 3) $y = g(g(x))$.

1.17. Задайте формулой какую-нибудь функцию, областью определения которой является:

1) множество действительных чисел, кроме чисел 1 и 2;

2) множество всех чисел, которые не меньше 5;

3) множество всех чисел, которые не больше 10, кроме числа –1;

4) множество, состоящее из одного числа –4.

1.18. Найдите область определения функции и постройте её график:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$; 2) $f(x) = \dfrac{12x - 72}{x^2 - 6x}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 9}$.

1.19. Найдите область определения функции и постройте её график:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$; 2) $f(x) = \dfrac{x^3}{x}$.

◆◆

1.20. Функция f задана описательно: каждому целому числу поставлен в соответствие остаток от деления этого числа на 3. Найдите $f(2)$, $f(0)$, $f(-17)$, $f(21)$. Найдите $E(f)$. Докажите, что $f(x) = f(x + 3)$ для любого $x \in \boldsymbol{Z}$.

1.21. Функция g задана описательно: каждому целому числу поставлен в соответствие остаток от деления этого числа на 4. Найдите $g(3)$, $g(0)$, $g(-21)$, $g(32)$. Найдите $E(g)$. Докажите, что $g(x) = g(x + 4)$ для любого $x \in \boldsymbol{Z}$.

1.22. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{4 - |x|} + \dfrac{1}{x + 2}$; 4) $y = \sqrt{|x + 1|(x - 3)}$;

2) $y = \sqrt{|x| - 3} + \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$; 5) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2(x + 2)}}$;

3) $y = \sqrt{(x - 1)^2(x - 2)}$; 6) $y = \sqrt{\operatorname{sgn} x}$.

1.23. Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3 - |x|}} + \dfrac{1}{x - 2}$; 4) $y = \sqrt{(x + 4)^2(x - 3)}$;

2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - 1}} + \sqrt{x + 4}$; 5) $y = \sqrt{|x + 5|(x + 2)}$;

3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{(x + 1)^2(x + 3)}}$; 6) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sgn} x}}$.

◆◆◆

1.24. Найдите область значений функции:

1) $y = -2x^2 + 3x - 4$; 2) $y = \dfrac{3x + 1}{2x + 3}$; 3) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

1.25. Найдите область значений функции:

1) $y = 5x^2 - x + 1$; 2) $y = \dfrac{2x - 1}{5x + 4}$; 3) $y = 4x + \dfrac{1}{x}$.

1.26. Постройте график функции $y = \left(\sqrt{(x + 2)^2 x}\right)^2 - x^3 - 4x^2$.

1.27. Известно, что $D(f) = [-1; 4]$. Найдите область определения функции:

1) $y = f(-x)$; 3) $y = f(1 - x)$; 5) $y = f(|x|)$;

2) $y = f(2x)$; 4) $y = f(x^2)$; 6) $y = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1.28. Известно, что $D(g) = [-9; 1]$. Найдите область определения функции:

1) $y = g(x + 1)$; 3) $y = g(x^2)$; 5) $y = g\left(\sqrt{x}\right)$;

2) $y = g\left(\frac{1}{3}x\right)$; 4) $y = g(|x|)$; 6) $y = g\left(\frac{1}{x}\right)$.

1.29. Найдите область определения функции:

1) $y = \frac{1}{\mathfrak{D}(x)}$; 3) $y = \frac{1}{\{x\}}$; 5) $y = \sqrt{\mathfrak{D}(x) - 1}$.

2) $y = \frac{1}{[x]}$; 4) $y = \sqrt{-\mathfrak{D}(x)}$;

1.30. Найдите область значений функции:
1) $y = \mathfrak{D}([x])$; 2) $y = \mathfrak{D}(\{x\})$; 3) $y = x\mathfrak{D}(x)$.

1.31. Найдите область значений функции:
1) $y = [\mathfrak{D}(x)]$; 2) $y = \{\mathfrak{D}(x)\}$.

1.32. Постройте график функции:
1) $y = \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(x))$; 2) $y = \{[x]\}$; 3) $y = \sqrt{1 - [x]^2}$.

1.33. Постройте график функции:

1) $y = [\{x\}]$; 2) $y = \sqrt{\{x\}(\{x\} - 1)}$.

1.34. Постройте график функции:
1) $y = \operatorname{sgn}(x + 1)$; 2) $y = \operatorname{sgn}(1 - x^2)$.

1.35. Постройте график функции:
1) $y = \operatorname{sgn}(1 - x)$; 2) $y = \operatorname{sgn}(x^2 - 4)$.

1.36. Функция задана описательно: каждому целому числу поставлен в соответствие остаток от деления квадрата этого числа на 5. Постройте график этой функции.

1.37. Функция задана описательно: каждому целому числу поставлен в соответствие остаток от деления квадрата этого числа на 3. Постройте график этой функции.

1.38. Каждому действительному числу поставили в соответствие ближайшее к нему на координатной прямой целое число. Является ли описанная зависимость функциональной?

1.39. Каждому действительному числу поставим в соответствие расстояние до ближайшего к нему на координатной прямой целого числа. Является ли описанная зависимость функциональной?

1.40. Найдите функцию f такую, что $D(f) = \boldsymbol{R}$ и для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $f(3x - 1) = x + 2$.

1.41. Найдите функцию g такую, что $D(g) = \boldsymbol{R}$ и для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $g(4 - x) = 3x + 1$.

1.42. Дана функция $f(x) = \frac{1}{1 - x}$. Постройте график функции $y = f(f(f(x)))$.

1.43. Найдите функцию f такую, что $D(f) = \boldsymbol{R}$ и для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $f(x) + 2f(-x) = x + 1$.

1.44. Найдите функцию f такую, что $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ и для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x}$.

1.45. Найдите функцию f такую, что $D(f) = \boldsymbol{R}$ и для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $2f(x) - f(1 - x) = x + 3$.

1.46. Дана функция $f(x) = x^2 + 2x$. Решите уравнение $f(f(f(x))) = 0$.

1.47. Дана функция $f(x) = x^2 + 10x + 20$. Решите уравнение $f(f(f(x))) = x$.

1.48. Дана функция $f(x) = x^2 - x + 1$. Решите уравнение $f(f(x)) = x$.

Упражнения для повторения

1.49. Решите уравнение $|2x - 1| = x + 2$.

1.50. Постройте график уравнения $\frac{y - x^2}{x^2 - x} = 0$.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Из истории развития понятия функции

Определение функции, которым вы пользуетесь на данном этапе изучения математики, появилось сравнительно недавно — в конце XIX в. Оно формировалось более 200 лет под влиянием бурных споров выдающихся математиков нескольких поколений.

Исследованием функциональных зависимостей между величинами начали заниматься ещё учёные древности. Этот поиск нашёл отражение в открытии формул для вычисления площадей и объёмов некоторых фигур. Примерами табличного задания функций могут служить астрономические таблицы вавилонян, древних греков и арабов.

Однако лишь в первой половине XVII в. открытием метода координат выдающиеся французские математики Пьер Ферма (1601–1665) и Рене Декарт (1596–1650) заложили основы для возникновения понятия функции. В своих работах они исследовали изменение ординаты точки в зависимости от изменения её абсциссы.

Важную роль в формировании понятия функции сыграли работы великого английского учёного Исаака Ньютона (1643–1727). Под функцией он понимал величину, которая изменяет своё значение с течением времени.