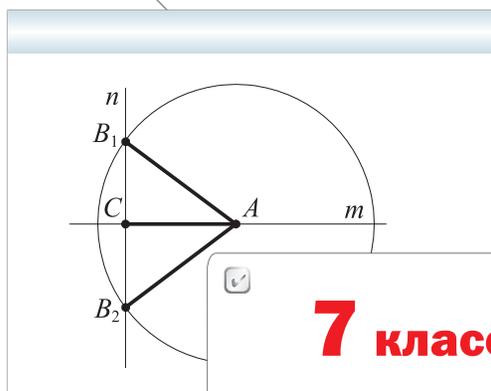


Алгоритм успеха

А.Г. Мерзляк  
В.Б. Полонский  
М.С. Якир

# Геометрия



**7 класс**



Учебник

*Под редакцией В.Е.Подольского*  
2-е издание, переработанное



Москва  
Издательский центр  
«Вентана-Граф»  
2016

УДК 373.167.1:514  
ББК 22.151.0я72  
М52

**Учебник соответствует Примерной основной образовательной программе  
основного общего образования и включён в Федеральный перечень**

Под редакцией проректора МГУ им. М. В. Ломоносова,  
доктора физико-математических наук В. Е. Подольского

**Мерзляк, А. Г.**

М52 Геометрия : 7 класс : учебник / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский,  
М. С. Якир ; под ред. В. Е. Подольского. — 2-е изд., перераб. — М. :  
Вентана-Граф, 2016. — 192 с. : ил.

ISBN 978-5-360-07107-5

Учебник предназначен для изучения геометрии в 7 классе общеобразова-  
тельных организаций. В нём предусмотрена уровневая дифференциация, по-  
зволяющая формировать у школьников познавательный интерес к математике.

Учебник входит в систему учебно-методических комплектов «Алгоритм  
успеха».

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному  
стандарту основного общего образования.

УДК 373.167.1:514  
ББК 22.151.0я72

---

*Учебное издание*

**Мерзляк** Аркадий Григорьевич  
**Полонский** Виталий Борисович  
**Якир** Михаил Семёнович

**Геометрия**

7 класс

Учебник

Редактор *Е. В. Буцко*. Макет, внешнее оформление *Е. В. Чайко*

Художественный редактор *Е. В. Чайко*

Художники: *Н. К. Вахонина, М. П. Кононов, А. И. Крысов, Ф. И. Павлов, И. С. Хавторина*

Фотографии: *А. Р. Андреев, В. А. Андрианов, Е. В. Аникина, Н. Г. Беляева,*

*ООО «Фотобанк Лори» (Losevsky Pavel)*

Компьютерная вёрстка *О. В. Поповой*. Технический редактор *Е. А. Урачнёва*

Корректоры *О. А. Мерзлякина, О. Ч. Кохановская*

Подписано в печать . Формат 70×90/16. Гарнитура NewBaskerville

Печать офсетная. Бумага офсетная № 1. Печ. л. 12,0. Тираж экз. Заказ №

ООО Издательский центр «Вентана-Граф».

127422, Москва, ул. Тимирязевская, д. 1, стр. 3

Тел./факс: (499) 641-55-29, (495) 234-07-53.

E-mail: info@vgf.ru, http://www.vgf.ru



© Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С., 2015

© Издательский центр «Вентана-Граф», 2015

© Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С., 2016,  
с изменениями

© Издательский центр «Вентана-Граф», 2016, с изменениями

ISBN 978-5-360-07107-5

## От авторов

### Дорогие семиклассники!

Вы начинаете изучать новый учебный предмет — **геометрию**. Обратите внимание, что в словах «география» и «геометрия» одинаковая часть — «гео», что в переводе с греческого означает «земля». Но если на уроках географии в 6 классе вы действительно занимались землеописанием («графия» в переводе с греческого — описание), то на уроках геометрии вам не придётся заниматься землемерием («метрео» в переводе с греческого — мерить).

Геометрия — одна из самых древних наук. Её название можно объяснить тем, что зарождение и развитие геометрии было тесно связано с разнообразной практической деятельностью человека: разметкой границ земельных участков, строительством дорог, оросительных каналов, зданий и других сооружений, т. е. геометрия, как говорят в таких случаях, была *прикладной наукой*. Постепенно, шаг за шагом человечество накапливало знания, и геометрия превратилась в красивую и совершенную, строгую и последовательную математическую теорию. Знакомиться с этой наукой и учиться применять полученные знания на практике вы и будете на уроках геометрии.

Знать геометрию чрезвычайно важно. Действительно, посмотрите вокруг — везде геометрия, точнее, **геометрические фигуры**: отрезки, треугольники, прямоугольники, прямоугольные параллелепипеды, шары и т. п.

Без глубоких геометрических знаний не могли появиться сложные строительные конструкции (рис. 1, 2), корабли (рис. 3), самолёты и даже детский конструктор и узоры вышивок (рис. 4). Создание узоров требует от мастерицы знания таких геометрических понятий, как «симметрия» и «параллельный перенос». Не зная геометрии, невозможно стать хорошим ин-



Рис. 4



женером-конструктором, токарем, столяром, учёным, архитектором, дизайнером, модельером, специалистом в области компьютерной графики и т. д. Вообще геометрические знания – важнейшая составляющая человеческой культуры.

Геометрия – очень интересный предмет. Мы надеемся, что вы в этом скоро убедитесь, и поможет этому учебник, который вы держите в руках. Познакомьтесь с его структурой.

Учебник разделён на четыре главы, каждая из которых состоит из параграфов. В них изложен теоретический материал, при изучении которого особое внимание обращайте на тексты, выделенные **шрифтом**.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи.

Каждый параграф завершает особая рубрика, которую мы назвали «Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте». В ней собраны задачи, для решения которых нужны не специальные геометрические знания, а смекалка, изобретательность и сообразительность. Они развивают «геометрическое зрение» и интуицию.

Кроме того, в учебнике вы сможете прочитать рассказы по истории геометрии.

Дерзайте! Желаем успеха!

## **Условные обозначения**



Простые задачи



Задачи средней сложности



Сложные задачи



Задачи высокой сложности



Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач



Окончание доказательства теоремы или решения задачи

**439**

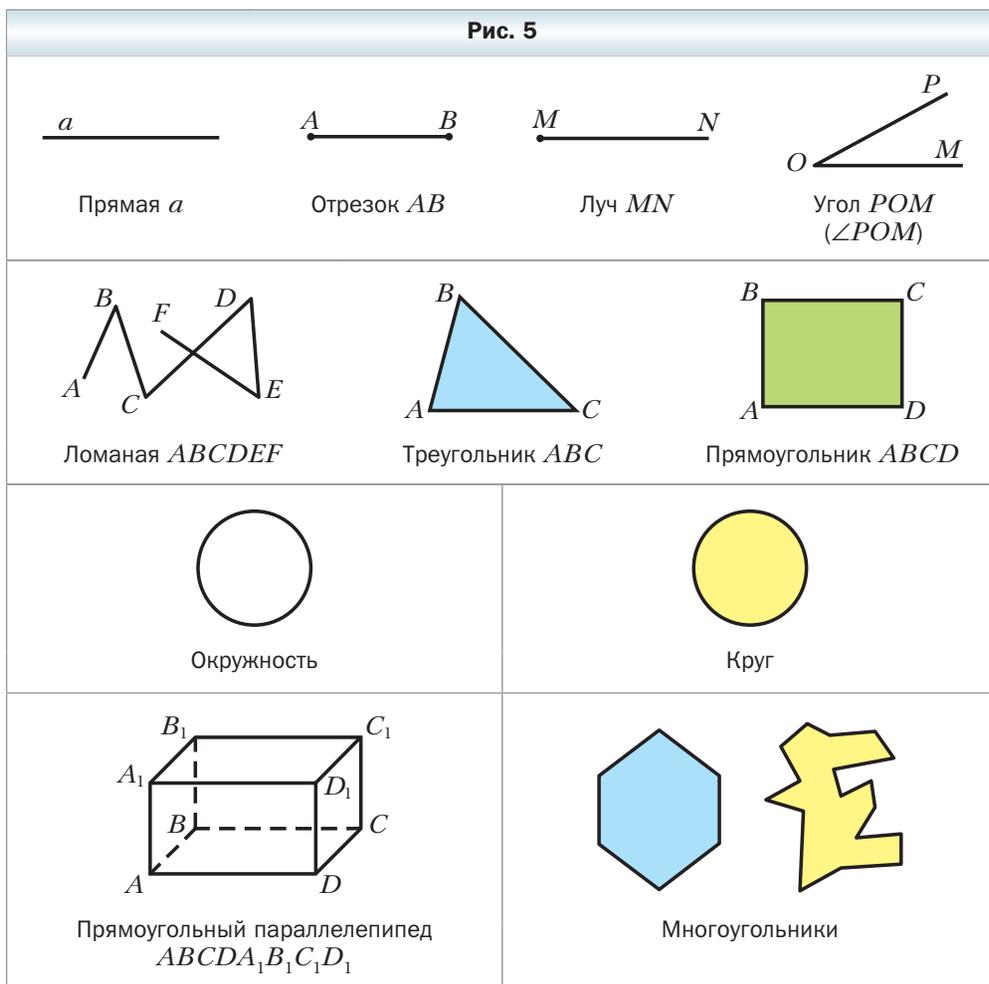
Задания, рекомендуемые для домашней работы

**480**

Задания, рекомендуемые для устной работы

## Что изучает геометрия?

Геометрия – новый для вас учебный предмет. На уроках математики вы уже знакомились с азами этой мудрой науки. Все геометрические фигуры, изображённые на рисунке 5, вам уже хорошо известны.



Вы умеете с помощью линейки соединять две точки отрезком (рис. 6), с помощью циркуля строить окружность (рис. 7), с помощью линейки и угольника проводить перпендикулярные и параллельные прямые (рис. 8), измерять длину отрезка и строить отрезок заданной длины с помощью линейки с миллиметровыми делениями (рис. 9), находить величину уг-

Рис. 6

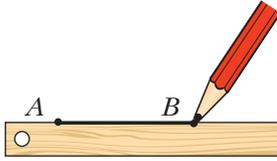


Рис. 7



Рис. 8

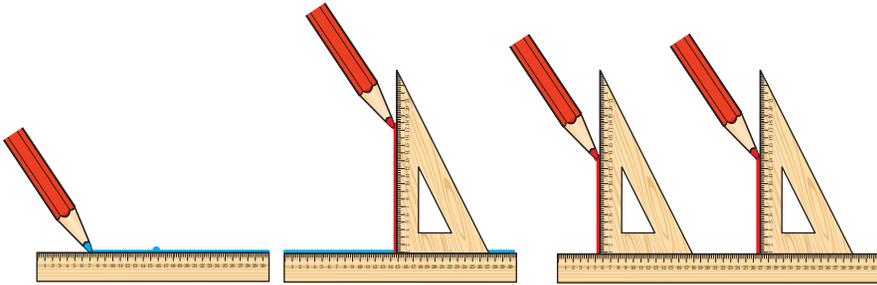
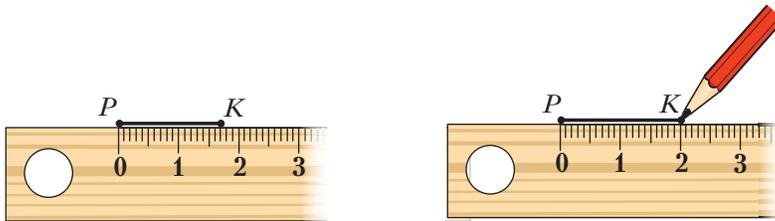


Рис. 9

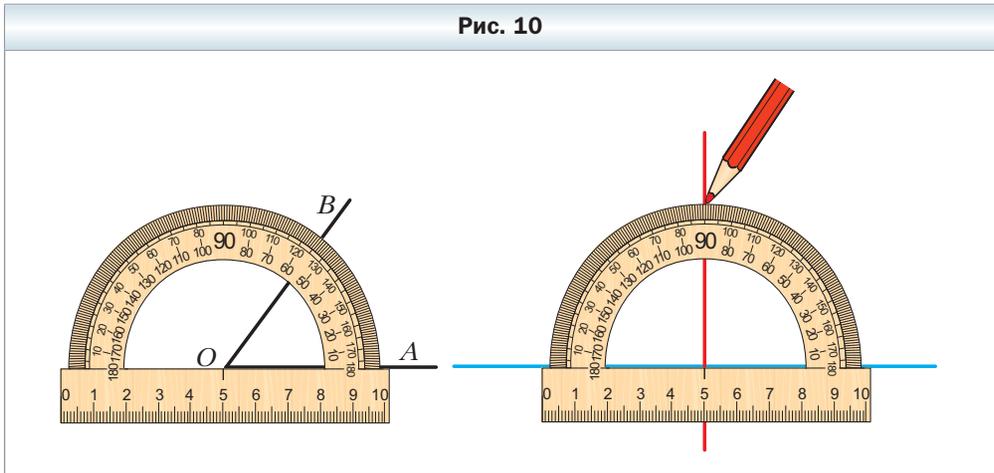


ла и строить угол заданной величины с помощью транспортира (рис. 10), классифицировать треугольники.

Однако знать, как выглядит фигура, или уметь выполнять простейшие построения – это всего лишь самые начальные знания *науки о свойствах геометрических фигур*, т. е. *геометрии*.

При изучении *систематического курса* геометрии вы будете постепенно в определённой последовательности изучать свойства геометриче-

Рис. 10



ских фигур, а следовательно, и сами фигуры, как знакомые вам, так и новые. Это означает, что вы должны научиться, используя одни свойства фигуры, находить, а главное, **доказывать** другие её свойства.

Многие знакомые вам реальные предметы или объекты имеют форму известных геометрических фигур, или, как ещё принято говорить, являются **моделями** геометрических фигур. Мы часто говорим: «лист бумаги имеет форму прямоугольника, футбольный мяч имеет форму шара, кирпич имеет форму прямоугольного параллелепипеда» и т. п. След, оставленный на бумаге остро заточенным карандашом, даёт представление о точке, поверхность водоёма в безветренную погоду может служить моделью плоскости.

Таким образом, *изучая геометрию, мы познаём окружающий нас мир\**.

Школьный курс геометрии традиционно делится на **планиметрию** и **стереометрию**. Планиметрия изучает фигуры на плоскости («планум» в переводе с латинского – плоскость). В стереометрии изучают фигуры в пространстве («стереос» в переводе с греческого – пространственный).

Итак, мы приступаем к изучению планиметрии.

---

\* Лучше понять, каким эффективным инструментом познания является геометрия, вы сможете, если примете участие в проекте «Геометрия вокруг нас» (см. с. 174).

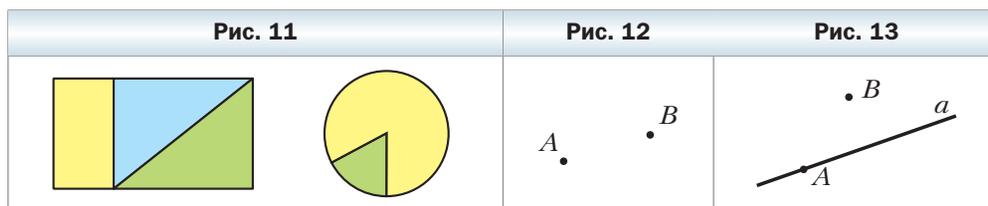
# Глава 1. Простейшие геометрические фигуры и их свойства

В этой главе рассматриваются знакомые вам из курса математики геометрические фигуры: точки, прямые, отрезки, лучи и углы.

Вы узнаете больше о свойствах этих фигур. Некоторые из этих свойств научитесь **доказывать**. Слова **определение**, **теорема**, **аксиома** станут для вас привычными, понятными и часто употребляемыми.

## § 1. Точки и прямые

**Точка** — самая простая геометрическая фигура. Это единственная фигура, которую нельзя разбить на части. Например, каждая из фигур, изображённых на рисунке 11, разбита на части. И даже о фигуре, изображённой на рисунке 12, состоящей из двух точек, можно сказать, что она состоит из двух частей: точки  $A$  и точки  $B$ .



На рисунке 13 изображены прямая  $a$  и две точки  $A$  и  $B$ . Говорят, что *точка  $A$  принадлежит прямой  $a$* , или *точка  $A$  лежит на прямой  $a$* , или *прямая  $a$  проходит через точку  $A$*  и соответственно *точка  $B$  не принадлежит прямой  $a$* , или *точка  $B$  не лежит на прямой  $a$* , или *прямая  $a$  не проходит через точку  $B$* .

**Прямая** — это геометрическая фигура, обладающая определёнными свойствами.

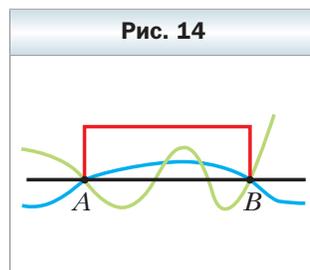
### Основное свойство прямой

**Через любые две точки\* можно провести прямую, и притом только одну.**

\* Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три точки», «две прямые» и т. п., будем подразумевать, что это разные точки и разные прямые. Случай их совпадения будем оговаривать особо.

Почему это свойство прямой — основное?

Пусть о некоторой линии известно лишь то, что она проходит через точки  $A$  и  $B$ . Для того чтобы составить представление об этой фигуре, такой информации явно недостаточно. Ведь через точки  $A$  и  $B$  можно провести много различных *линий* (рис. 14). Прямая же задаётся этими точками однозначно. В этом и состоит суть основного свойства прямой.



Это свойство позволяет обозначать прямую, называя две любые её точки. Так, прямую, проведённую через точки  $M$  и  $N$ , называют «прямая  $MN$ » (или «прямая  $NM$ »).

Основное свойство геометрической фигуры ещё называют аксиомой (более подробно об аксиомах вы узнаете в § 6).

Если хотят разъяснить смысл какого-либо слова (термина), то используют **определения**. Например:

- 1) часы называют прибор для измерения времени;
  - 2) геометрия — это раздел математики, изучающий свойства фигур.
- Определения есть и в геометрии.

**Определение**

**Две прямые, имеющие общую точку, называют пересекающимися.**

На рисунке 15 изображены прямые  $a$  и  $b$ , пересекающиеся в точке  $O$ .

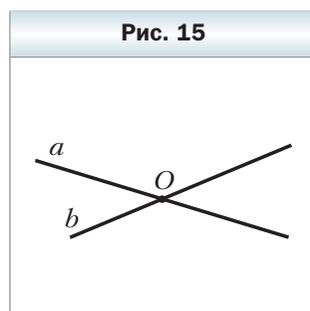
Часто справедливость (истинность) какого-либо факта приходится устанавливать с помощью *логических рассуждений*.

Рассмотрим такую задачу. Известно, что все жители Геометрической улицы — математики. Женя живёт по адресу: ул. Геометрическая, 5. Является ли Женя математиком?

По условию задачи Женя живёт на Геометрической улице. А поскольку все жители этой улицы математики, то Женя — математик.

Приведённые логические рассуждения называют **доказательством** того факта, что Женя — математик.

В математике утверждение, истинность которого устанавливают с помощью доказательства, называют **теоремой**.

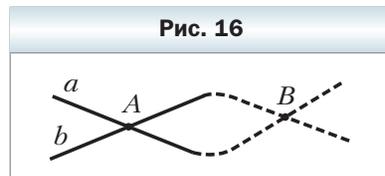


✓ **Теорема 1.1**

**Любые две пересекающиеся прямые имеют только одну общую точку.**

**Доказательство**

Пусть пересекающиеся прямые  $a$  и  $b$ , помимо общей точки  $A$ , имеют ещё одну общую точку  $B$  (рис. 16). Тогда через две точки  $A$  и  $B$  проходят две прямые. А это противоречит основному свойству прямой. Следовательно, наше предположение о существовании второй точки пересечения прямых  $a$  и  $b$  неверно. ◀



1. Какую фигуру нельзя разбить на части?
2. Сформулируйте основное свойство прямой.
3. Какое свойство прямой позволяет обозначать её, называя любые две точки прямой?
4. Для чего используют определения?
5. Какие две прямые называют пересекающимися?
6. Как называют утверждение, истинность которого устанавливают с помощью доказательства?
7. Сформулируйте теорему о двух пересекающихся прямых.

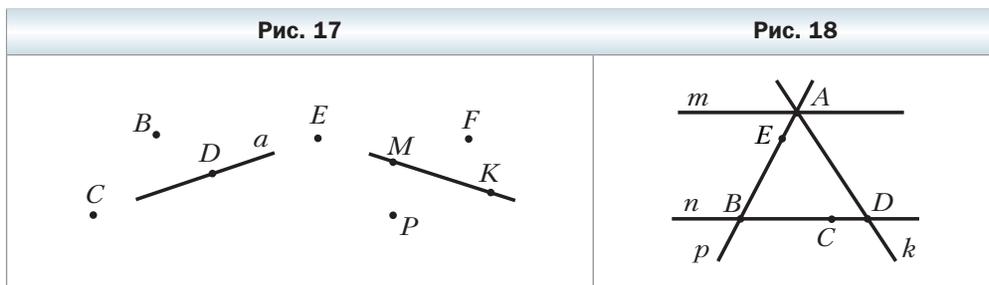
**Практические задания**

1. Проведите прямую, обозначьте её буквой  $m$ . Отметьте точки  $A$  и  $B$ , лежащие на этой прямой, и точки  $C, D, E$ , не лежащие на ней.
2. Отметьте точки  $M$  и  $K$  и проведите через них прямую. Отметьте на этой прямой точку  $E$ . Запишите все возможные обозначения полученной прямой.
3. Проведите прямые  $a$  и  $b$  так, чтобы они пересекались. Обозначьте точку их пересечения буквой  $C$ . Принадлежит ли точка  $C$  прямой  $a$ ? Прямой  $b$ ?
4. Отметьте три точки так, чтобы они не лежали на одной прямой, и через каждую пару точек проведите прямую. Сколько образовалось прямых?
5. Отметьте четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой.
6. Проведите три прямые так, чтобы каждые две из них пересекались. Отметьте точки пересечения этих прямых. Сколько можно получить точек пересечения?

7. Правильность изготовления линейки можно проверить так. Через две точки с помощью линейки провести линию. Затем линейку перевернуть и через эти же точки вдоль того же края линейки вновь провести ещё одну линию. Если линии совпадут, то линейка изготовлена правильно. Объясните почему.

### Упражнения

8. Пользуясь рисунком 17:
- 1) определите, пересекаются ли прямые  $a$  и  $MK$ ;
  - 2) укажите все отмеченные точки, принадлежащие прямой  $a$ ; прямой  $MK$ ;
  - 3) укажите все отмеченные точки, не принадлежащие прямой  $a$ ; прямой  $MK$ ;
  - 4) укажите все отмеченные точки, принадлежащие прямой  $a$ , но не принадлежащие прямой  $MK$ .
9. Пользуясь рисунком 18, укажите:
- 1) какие из отмеченных точек принадлежат прямой  $p$ , а какие не принадлежат ей;
  - 2) каким прямым принадлежат точка  $A$ , точка  $B$ , точка  $C$ , точка  $D$  и точка  $E$ ;
  - 3) какие прямые проходят через точку  $C$ , точку  $B$  и точку  $A$ ;
  - 4) в какой точке пересекаются прямые  $k$  и  $p$ ; прямые  $m$  и  $k$ ;
  - 5) в какой точке пересекаются три из четырёх изображённых на рисунке прямых.



10. Точка  $C$  принадлежит прямой  $AB$ . Являются ли различными прямые  $AB$  и  $AC$ ? Ответ обоснуйте.
11. Провели четыре прямые, каждые две из которых пересекаются, причём через каждую точку пересечения проходят только две прямые. Сколько точек пересечения при этом образовалось?



12. Как надо расположить шесть точек, чтобы они определяли шесть прямых?
13. Данную прямую пересекают четыре прямые. Сколько может образоваться точек пересечения этих прямых с данной?
14. Провели четыре прямые, каждые две из которых пересекаются. Сколько точек пересечения может образоваться?
15. Провели пять прямых, каждые две из которых пересекаются. Каково наименьшее возможное количество точек пересечения этих прямых? Какое наибольшее количество точек пересечения может образоваться?

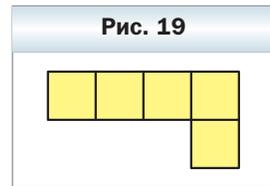


16. Можно ли провести шесть прямых и отметить на них 11 точек так, чтобы на каждой прямой было отмечено ровно четыре точки?
17. На плоскости проведены три прямые. На первой прямой отметили пять точек, на второй – семь точек, а на третьей – три точки. Каким может быть наименьшее количество отмеченных точек?
18. Можно ли отметить несколько точек и провести несколько прямых так, чтобы на каждой прямой лежали ровно три отмеченные точки и через каждую точку проходили ровно три из проведённых прямых?



**Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте**

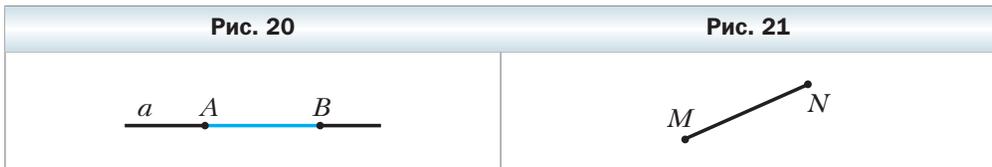
19. Из фигурок, имеющих вид уголка (рис. 19), сложите квадрат.



## § 2. Отрезок и его длина

На рисунке 20 изображена прямая  $a$ , проходящая через точки  $A$  и  $B$ . Эти точки ограничивают часть прямой  $a$ , выделенную синим цветом. Такую часть прямой вместе с точками  $A$  и  $B$  называют **отрезком**, а точки  $A$  и  $B$  – **концами** этого отрезка.

Для любых двух точек  $M$  и  $N$  существует *единственный* отрезок, для которого эти точки являются концами (рис. 21), т. е. *отрезок своими кон-*



цами задаётся однозначно. Поэтому отрезок обозначают, указывая его концы. Например, отрезок на рисунке 21 обозначают так:  $MN$  или  $NM$  (читают: «отрезок  $MN$ » или «отрезок  $NM$ »).

На рисунке 22 изображены отрезок  $AB$  и точка  $X$ , принадлежащая этому отрезку, но не совпадающая ни с одним из его концов. Точку  $X$  называют **внутренней** точкой отрезка  $AB$ . В этом случае также говорят, что точка  $X$  **лежит между** точками  $A$  и  $B$ .

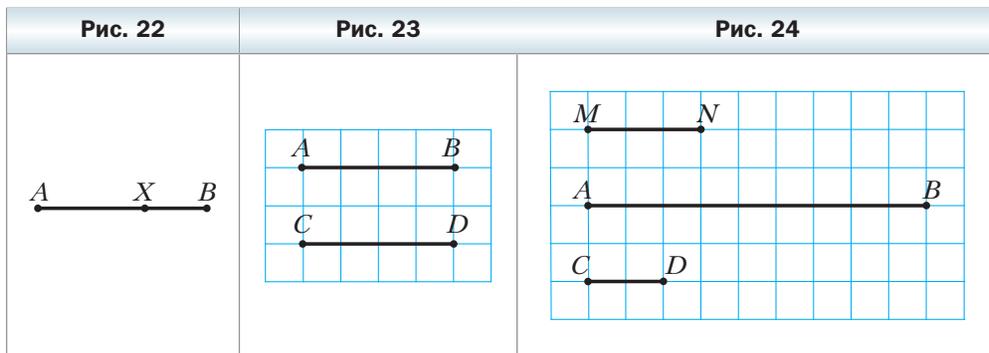
Таким образом, отрезок  $AB$  состоит из точек  $A$  и  $B$ , а также всех точек прямой  $AB$ , лежащих между точками  $A$  и  $B$ .

 **Определение**

**Два отрезка называют равными, если их можно совместить наложением.**

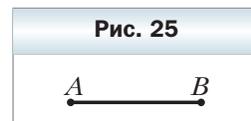
На рисунке 23 изображены равные отрезки  $AB$  и  $CD$ . Пишут:  $AB = CD$ . Вы знаете, что каждый отрезок имеет определённую длину, и для её измерения надо выбрать **единичный отрезок**. В качестве единичного можно выбрать любой отрезок.

Например, будем считать отрезок  $MN$  на рисунке 24 единичным. Этот факт записывают так:  $MN = 1$  ед. Тогда длину отрезка  $AB$  считают равной **трём единицам длины** и записывают:  $AB = 3$  ед. Также принята запись:  $AB = 3$ . Для отрезка  $CD$  имеем:  $CD = \frac{2}{3}$ .

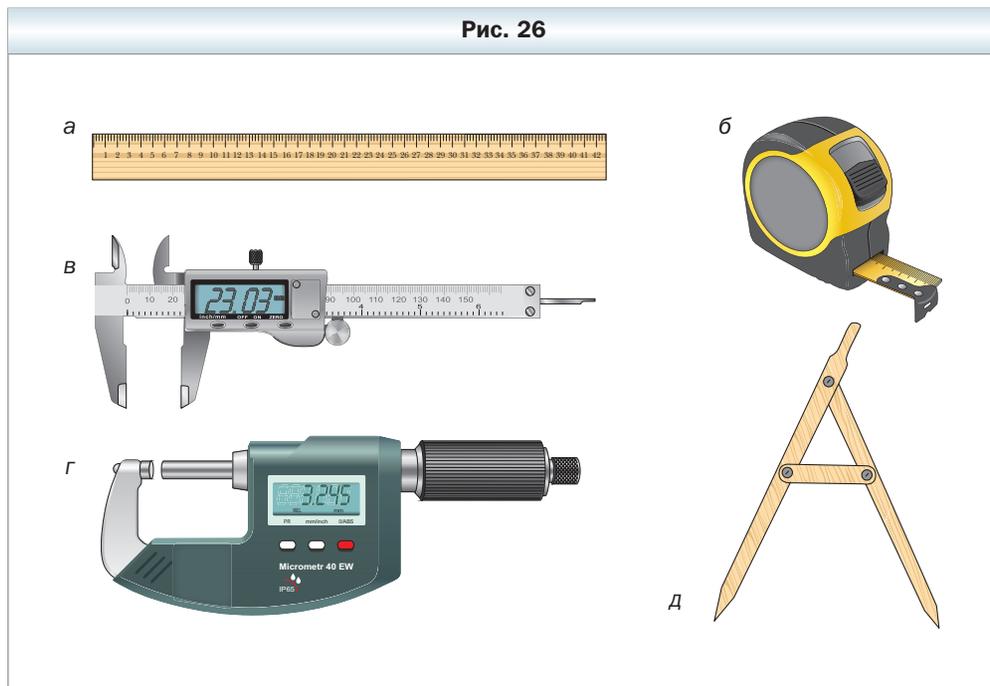


На практике чаще всего используют такие единичные отрезки: 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км.

В зависимости от выбора единицы длины меняется **числовое значение длины** отрезка. Например, на рисунке 25 имеем:  $AB = 17$  мм, или  $AB = 1,7$  см, или  $AB = 0,17$  дм и т. д.



На производстве и в быту используют различные приборы для измерения длины отрезка: линейку с делениями (рис. 26, а), рулетку (рис. 26, б), штангенциркуль (рис. 26, в), микрометр (рис. 26, г), полевой циркуль (рис. 26, д).



*Равные отрезки имеют равные длины, и наоборот, если длины отрезков равны, то равны и сами отрезки.*

Если длина отрезка  $AB$  больше длины отрезка  $MN$ , как, например, на рисунке 24, то будем говорить, что отрезок  $AB$  больше отрезка  $MN$ , и записывать:  $AB > MN$ . Также можно сказать, что отрезок  $MN$  меньше отрезка  $AB$ , и записать:  $MN < AB$ .

В дальнейшем, говоря «сумма отрезков», будем подразумевать сумму длин этих отрезков.

**Основное свойство длины отрезка**

**Если точка  $C$  является внутренней точкой отрезка  $AB$ , то отрезок  $AB$  равен сумме отрезков  $AC$  и  $CB$ , т. е.  $AB = AC + CB$  (рис. 27).**

