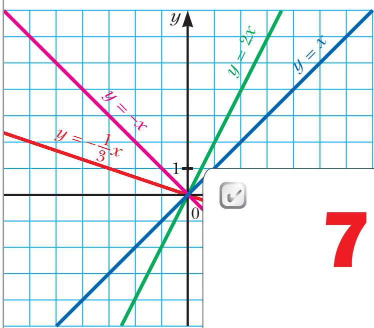
российский учебник

А.Г. Мерзляк
В.Б. Полонский
М.С. Якир

Алгебра



7 класс

Учебник

Под редакцией В. Е. Подольского

5-е издание, стереотипное

Рекомендовано
Министерством просвещения
Российской Федерации

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2019

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я72
М52

Одобрено Научно-редакционным советом корпорации «Российский учебник» под председательством академиков Российской академии наук В. А. Тишкова и В. А. Черешнева

Под редакцией проректора МГУ им. М. В. Ломоносова, доктора физико-математических наук В. Е. Подольского

Мерзляк, А. Г.
М52 Алгебра : 7 класс : учебник / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир ; под ред. В. Е. Подольского. — 5-е изд., стереотип. — М. : Вентана-Граф, 2019. — 270, [2] с. : ил. — (Российский учебник).
ISBN 978-5-360-09809-6

Учебник предназначен для изучения алгебры в 7 классе общеобразовательных организаций. В нём предусмотрена уровневая дифференциация, позволяющая формировать у школьников познавательный интерес к алгебре.

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я72

ISBN 978-5-360-09809-6

От авторов

Дорогие семиклассники!

Вы начинаете изучать новый школьный предмет — **алгебру**.

Алгебра — очень древняя и мудрая наука. С её азами вам предстоит познакомиться. Знать алгебру чрезвычайно важно. По-видимому, нет сегодня такой области знаний, в которой не применялись бы достижения этой науки: физики и химики, астрономы и биологи, географы и экономисты, даже языковеды и историки используют «алгебраический инструмент».

Алгебра — не только полезный, но и очень интересный предмет, развивающий сообразительность и логическое мышление. И мы надеемся, что вы в этом скоро убедитесь с помощью учебника, который держите в руках. Познакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Учебник разделён на четыре главы, каждая из которых состоит из параграфов. В параграфах изложен теоретический материал. Особое внимание обращайте на текст, выделенный **жирным шрифтом**. Также обращайте внимание на слова, выделенные *курсивом*.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи (особенно те, которые обозначены звёздочкой ✲).

Каждый параграф завершает особая рубрика, которую мы назвали «Учимся делать нестандартные шаги». В ней собраны задачи, для решения которых нужны не специальные алгебраические знания, а лишь здравый смысл, изобретательность и сообразительность. Они помогут вам научиться принимать неожиданные и нестандартные решения не только в математике, но и в жизни.

Кроме того, в учебнике вы сможете прочитать рассказы по истории алгебры.

Дерзайте! Желаем успеха!

Условные обозначения

○ Простые задачи

○○ Задачи средней сложности

✧ Сложные задачи

✵ Задачи высокой сложности

◄ Окончание доказательства теоремы или решения задачи

Работа с компьютером

340 Задания, рекомендуемые для домашней работы

310 Задания, рекомендуемые для устной работы

§ 1. Введение в алгебру

Алгебра — для вас новый школьный предмет. Тем не менее вы уже знакомы с «азбукой» этой науки. Так, когда вы записывали формулы и составляли уравнения, вам приходилось обозначать числа буквами, конструируя **буквенные выражения**.

Например, записи a^2, $(x + y)^2$, $2(a + b)$, $\dfrac{x - y + z}{2}$, abc, $\dfrac{m}{n}$ являются буквенными выражениями.

Подчеркнём, что не всякая запись, состоящая из чисел, букв, знаков арифметических действий и скобок, является буквенным выражением. Например, запись $2x$ +) – (представляет собой бессмысленный набор символов.

Вместе с тем выражение, составленное из одной буквы, считают буквенным выражением.

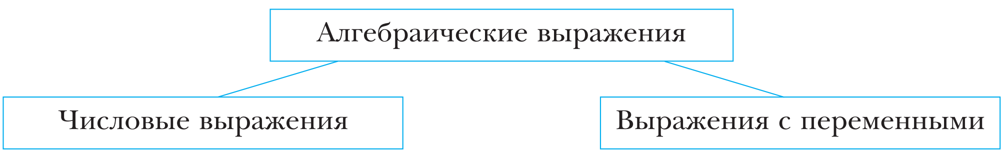
Рассмотрим буквенное выражение $2(a + b)$. Вы знаете, что с его помощью можно найти периметр прямоугольника со сторонами a и b. Если, например, буквы a и b заменить соответственно числами 3 и 4, то получим **числовое выражение** $2(3 + 4)$. В этом случае периметр прямоугольника будет равен 14 единицам длины. Число 14 называют **значением числового выражения** $2(3 + 4)$.

Понятно, что вместо букв a и b можно подставлять и другие числа, получая каждый раз новое числовое выражение.

Поскольку буквы можно заменять произвольными числами, то эти буквы называют **переменными**, а само буквенное выражение — **выражением с переменными** (или с переменной, если она одна).

Рассмотрим выражение $2x + 3$. Если переменную x заменить, например, числом $\dfrac{1}{2}$, то получим числовое выражение $2 \cdot \dfrac{1}{2} + 3$, значение которого равно 4. При этом говорят, что $\dfrac{1}{2}$ — **значение переменной** x, а число 4 — **значение выражения** $2x + 3$ при $x = \dfrac{1}{2}$.

Числовые выражения и выражения с переменными называют **алгебраическими выражениями**.



Рассмотрим две группы алгебраических выражений.

I группа	II группа
$x - y^3$	$\frac{1}{x}$
$\frac{a}{4}$	$\frac{ab}{(a+b)^2}$
$\frac{1}{3}b^2 + 5a$	$\frac{m}{n+3}$
$\frac{mn}{7}$	$5 - \frac{x}{y^2}$

Выражения каждой группы содержат такие действия: сложение, вычитание, умножение, возведение в степень, деление. Однако выражения первой группы не содержат деления на выражения с переменными. Их называют **целыми выражениями**. Выражения второй группы целыми не являются.

В 7 классе мы будем изучать целые выражения.

Пример. Значения переменных a, b и m таковы, что $a - b = 4$, $m = -5$. Чему равно значение выражения $7bm - 7am$?

Решение. Используя распределительное и сочетательное свойства умножения, получаем:

$$7bm - 7am = 7m(b - a) = 7 \cdot (-5) \cdot (-4) = 7 \cdot 20 = 140.$$

Ответ: 140. ◄

1. Как иначе называют буквенные выражения?
2. Какие выражения называют алгебраическими?
3. Какие алгебраические выражения называют целыми?

Упражнения

1. Найдите значение числового выражения:

1) 0,72 + 3,018; 3) 1,8 · 0,3; 5) 72 : 0,09;
2) 4 – 2,8; 4) 5,4 : 6; 6) 9 : 4.

2. Чему равно значение выражения:

1) $\frac{1}{3} + \frac{5}{6}$; 4) $\frac{4}{9} \cdot 18$; 7) $10 : \frac{5}{11}$; 10) $4\frac{2}{7} - 1\frac{4}{9}$;
2) $\frac{3}{7} - \frac{2}{9}$; 5) $\frac{46}{75} : \frac{23}{45}$; 8) $2\frac{3}{8} + 4\frac{1}{6}$; 11) $8\frac{3}{4} \cdot 1\frac{3}{14}$;
3) $\frac{7}{16} \cdot \frac{8}{35}$; 6) $\frac{2}{3} : 4$; 9) $6 - 1\frac{3}{5}$; 12) $1\frac{3}{5} : 5\frac{1}{3}$?

3. Вычислите значение выражения:

1) $3{,}8 + (-2{,}5)$;
2) $-4{,}8 + 4{,}8$;
3) $-1 + 0{,}39$;
4) $9{,}4 - (-7{,}8)$;
5) $4{,}2 - 5{,}7$;
6) $0 - 7{,}8$;
7) $0 - (-2{,}4)$;
8) $-4{,}5 - 2{,}5$;
9) $8 \cdot (-0{,}4)$;
10) $-1{,}2 \cdot (-0{,}5)$;
11) $-48 \cdot 0$;
12) $-3{,}3 : (-11)$;
13) $3{,}2 : (-4)$;
14) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$;
15) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^2$.

4. Чему равно значение выражения:

1) $18\frac{5}{12} - \frac{7}{12} \cdot 1\frac{19}{21} - \frac{17}{72} \cdot \frac{2}{3}$;

2) $\left(6\frac{3}{4} - 5\frac{1}{8} : 1\frac{9}{32}\right) \cdot \frac{5}{11}$;

3) $(-1{,}42 - (-3{,}22)) : (-0{,}4) + (-6) \cdot (-0{,}7)$;

4) $\left(-\frac{7}{18} + \frac{11}{12}\right) : \left(-\frac{19}{48}\right)$;

5) $\left(-3\frac{1}{12} - 2\frac{1}{15}\right) : \left(-5\frac{3}{20}\right)$?

5. Вычислите значение числового выражения:

1) $14\frac{7}{15} - 3\frac{3}{23} \cdot \frac{23}{27} - 1\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$;

2) $\left(5\frac{8}{9} : 1\frac{17}{36} + 1\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{5}{21}$;

3) $(-3{,}25 - 2{,}75) : (-0{,}6) + 0{,}8 \cdot (-7)$;

4) $\left(-1\frac{3}{8} - 2\frac{5}{12}\right) : 5\frac{5}{12}$.

6. Составьте числовое выражение и найдите его значение:

1) произведение суммы чисел -12 и 8 и числа $0{,}5$;
2) сумма произведения чисел -12 и 8 и числа $0{,}5$;
3) частное суммы и разности чисел $-1{,}6$ и $-1{,}2$;
4) квадрат суммы чисел -10 и 6;
5) сумма квадратов чисел -10 и 6.

7. Составьте числовое выражение и найдите его значение:

1) частное от деления суммы чисел $\frac{4}{9}$ и $-\frac{5}{6}$ на число $-\frac{14}{27}$;
2) разность произведения чисел $-1{,}5$ и 4 и числа 2;
3) произведение суммы и разности чисел $-1{,}9$ и $0{,}9$;
4) куб разности чисел 6 и 8.

8. Найдите значение выражения:
1) $2x - 3$ при $x = 4; 0; -3$;
2) $\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b$ при $a = -6$, $b = 16$;
3) $3m - 5n + 3k$ при $m = -7$, $n = 1{,}4$, $k = -0{,}1$.

9. Вычислите значение выражения:
1) $0{,}4y + 1$ при $y = -0{,}5; 8; -10$;
2) $\frac{2}{7}c - 0{,}2d$ при $c = -28$, $d = 15$.

10. Какие из данных выражений являются целыми:
1) $7a + 0{,}3$;
2) $5x\left(y - \frac{1}{3}\right)$;
3) $\frac{a+b}{c}$;
4) $\frac{a+b}{4}$;
5) $\frac{3m}{5} + \frac{5}{3m}$;
6) $9x - 5y + \frac{1}{z}$?

11. Используя термины «сумма», «разность», «произведение», «частное», прочитайте алгебраические выражения и укажите, какие из них являются целыми:
1) $a - (b + c)$;
2) $a + bc$;
3) $x - \frac{y}{z}$;
4) $2m - 10$;
5) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$;
6) $(a + b)c$;
7) $ac + bc$;
8) $\frac{a}{b+4}$;
9) $(a - b)(c + d)$.

12. Запишите в виде выражения:
1) число, противоположное числу a;
2) число, обратное числу a;
3) сумму чисел x и y;
4) число, обратное сумме чисел x и y;
5) сумму чисел, обратных числам x и y;
6) сумму числа a и его квадрата;
7) частное от деления числа a на число, противоположное числу b;
8) произведение суммы чисел a и b и числа, обратного числу c;
9) разность произведения чисел m и n и частного чисел p и q.

13. По условию задачи составьте выражения с переменными. Карандаш стоит x р., а тетрадь — y р.
1) Сколько стоят 5 карандашей и 7 тетрадей?
2) На сколько больше надо заплатить за a тетрадей, чем за b карандашей?

14. По условию задачи составьте выражение с переменными. Рабочему выдали заработную плату одной купюрой номиналом 1000 р., a купюрами номиналом 500 р. и b купюрами по 100 р. Какую сумму денег получил рабочий?

15. По условию задачи составьте выражение с переменными. Из двух городов, расстояние между которыми равно 300 км, выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля со скоростями m км/ч и n км/ч. Через сколько часов после начала движения они встретятся?

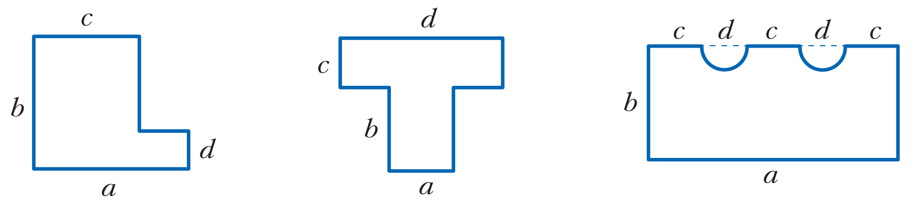
16. По условию задачи составьте выражение с переменными. Из двух сёл, расстояние между которыми равно s км, одновременно в одном направлении отправились пешеход и велосипедист. Через сколько часов после начала движения велосипедист догонит пешехода, если пешеход шёл впереди со скоростью a км/ч, а велосипедист ехал со скоростью b км/ч? Вычислите значение полученного выражения при $a = 4$, $b = 12$, $s = 12$.

17. Запишите в виде выражения:
1) утроенное произведение разности чисел a и b и их суммы;
2) сумму трёх последовательных натуральных чисел, меньшее из которых равно n;
3) произведение трёх последовательных чётных натуральных чисел, большее из которых равно $2k$;
4) число, в котором a тысяч, b сотен и c единиц;
5) количество сантиметров в x метрах и y сантиметрах;
6) количество секунд в m часах, n минутах и p секундах.

18. Запишите в виде выражения:
1) произведение четырёх последовательных натуральных чисел, большее из которых равно x;
2) разность произведения двух последовательных нечётных натуральных чисел и меньшего из них, если большее число равно $2k + 1$;
3) количество килограммов в a тоннах и b центнерах.

19. Составьте выражения для вычисления длины синей линии и площади фигуры, которую она ограничивает (рис. 1).

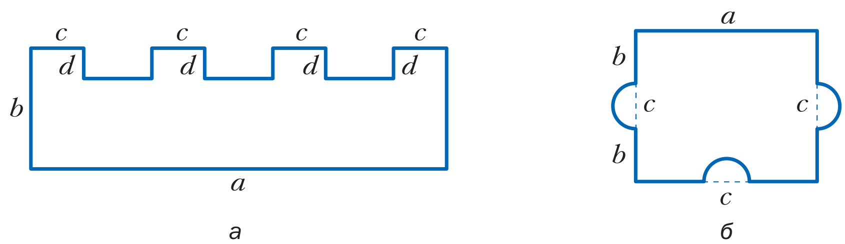
Рис. 1



а б в

20. Составьте выражения для вычисления длины синей линии и площади фигуры, которую она ограничивает (рис. 2).

Рис. 2



21. Значения переменных a и b таковы, что $a + b = -8$, $c = 4$. Чему равно значение выражения:

1) $a + b - c$; 2) $0{,}5(a + b) + c$; 3) $3ac + 3bc$?

22. Значения переменных m и n таковы, что $m - n = 5$, $k = -2$. Чему равно значение выражения:

1) $(n - m)k$; 2) $2m - 2n + 3k$?

Упражнения для повторения

23. (*Задача из русского фольклора.*) Мельник берёт за работу $\frac{1}{10}$ смолотой муки. Сколько муки намололи крестьянину, если домой он повёз 99 пудов муки?

24. В столовую завезли капусту, морковь и картофель. Капусты было 64 кг, масса моркови составляла $\frac{5}{8}$ массы капусты, а масса картофеля — 180% массы моркови. Сколько всего килограммов овощей завезли в столовую?

25. Известно, что a и b — натуральные числа, а число $\frac{a}{b}$ — правильная дробь. Можно ли утверждать, что:

1) $a - b > 0$; 2) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; 3) $\frac{b}{a} > \frac{a}{b}$?

Готовимся к изучению новой темы

26. Докажите, что:

1) число 5 является корнем уравнения $3x + 1 = 21 - x$;

2) число -2 не является корнем уравнения $x(x + 4) = 4$.

27. Решите уравнение:

1) $0{,}3x = 9$; 2) $-2x = 3$; 3) $15x = 0$.

28. Раскройте скобки:

1) $2(x - 3y + 4z)$; 2) $-0{,}4(-5 + 1{,}5y)$.

29. Приведите подобные слагаемые:

1) $4a + 9a - 18a + a$; 2) $1{,}2a - a + b - 2{,}1b$.

30. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

1) $(x + 3{,}2) - (x + 4{,}5)$; 2) $1{,}4(a - 2) - (6 - 2a)$.

31. Найдите корень уравнения:

1) $2x - 7 = x + 4$; 2) $-0{,}7(5 - x) = -4{,}9$.

Обновите в памяти содержание п. 26, 27 на с. 247, 248.

Учимся делать нестандартные шаги

32. Дано 12 натуральных чисел. Докажите, что из них всегда можно выбрать два, разность которых делится нацело на 11.

Когда сделаны уроки

Книга о восстановлении и противопоставлении

При подготовке к новой теме вы повторили основные свойства уравнений (п. 26, 27 на с. 247, 248). Примечательно, что с одним из этих свойств связано происхождение слова «алгебра».

В IX в. выдающийся учёный Мухаммед ибн Муса аль-Хорезми[1] (что означает Мухаммед, сын Мусы, из Хорезма) написал трактат о способах решения уравнений. В те времена отрицательные числа не признавали и называли невозможными, ложными, абсурдными. Поэтому, если при решении уравнений появлялось «ложное число», его превращали в «настоящее», перенося в другую часть уравнения. Такое преобразование Мухаммед аль-Хорезми назвал *восстановлением* (по-арабски — «аль-джабр»). Уничтожение одинаковых членов в обеих частях уравнения он назвал *противопоставлением* (по-арабски — «аль-мукабала»).

Мухаммед аль-Хорезми

[1] Мухаммед аль-Хорезми (IX в.) — математик, астроном и географ, в научных работах которого впервые алгебра рассматривалась как самостоятельный раздел математики.

Сам трактат носит название «Краткая книга об исчислении восстановления и противопоставления» (по-арабски – «Китаб аль-мухтасар фи хисаб аль-джабр ва-аль-мукабала»).

Слово «аль-джабр» со временем превратилось в хорошо знакомое всем слово «алгебра».

В XII в. труды аль-Хорезми были переведены на латынь. В средневековой Европе имя аль-Хорезми записывали как *Algorizmi*, и многие правила из его трудов начинались словами *Dixit Algorizmi* («Алгоризми сказал»). Постепенно стали привыкать, что с этих слов начинаются многие правила, а слово *Algorizmi* перестали связывать с именем автора. Так возник термин «алгоритм», которым обозначают процесс, дающий за конечное количество шагов решение задачи.

С такими процессами вы подробно познакомитесь на уроках информатики.

Глава 1. Линейное уравнение с одной переменной

В этой главе вы повторите свойства уравнений, сможете усовершенствовать навыки решения уравнений и задач на составление уравнений.

Вы узнаете, что некоторые известные вам уравнения можно объединить в один класс.

§ 2. Линейное уравнение с одной переменной

Рассмотрим три уравнения:

$$2x = -3,$$
$$0x = 0,$$
$$0x = 2.$$

Число $-1{,}5$ является единственным корнем первого уравнения.

Поскольку произведение любого числа на нуль равно нулю, то корнем второго уравнения является любое число.

Третье уравнение корней не имеет.

Несмотря на существенное различие полученных ответов, приведённые уравнения внешне похожи: все они имеют вид $ax = b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа.

Уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, называют линейным уравнением с одной переменной.

Приведём ещё примеры линейных уравнений:

$$\frac{1}{2}x = 7; \quad -0{,}4x = 2{,}8; \quad -x = 0.$$

Заметим, что, например, уравнения $x^2 = 0$, $(x - 2)(x - 3) = 0$, $|x| = 5$ линейными не являются.

Текст, выделенный **жирным шрифтом**, разъясняет смысл термина «линейное уравнение с одной переменной». В математике предложение, раскрывающее суть термина (понятия, объекта), называют **определением**.

Итак, мы сформулировали (или, говорят, «дали») определение линейного уравнения с одной переменной.

1) Если $a \neq 0$, то, разделив обе части уравнения $ax = b$ на a, получим $x = \frac{b}{a}$. Отсюда следует: *если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственный корень, равный $\frac{b}{a}$.*

2) Если $a = 0$, то линейное уравнение приобретает такой вид: $0x = b$. Тогда возможны два случая: $b = 0$ или $b \neq 0$.

В первом случае получаем уравнение $0x = 0$. Отсюда: *если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение $ax = b$ имеет бесконечно много корней: любое число является его корнем.*

Во втором случае, когда $b \neq 0$, при любом значении x получим неверное равенство $0x = b$. Отсюда: *если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение $ax = b$ корней не имеет.*

Подведём итог приведённых рассуждений в следующей таблице.

Значения a и b	$a \neq 0$	$a = 0$, $b = 0$	$a = 0$, $b \neq 0$
Корни уравнения $ax = b$	$x = \frac{b}{a}$	x — любое число	Корней нет

Пример 1. Решите уравнение:

1) $(3x + 2{,}1)(8 - 2x) = 0$; 2) $|5x - 6| = 4$.

Решение. 1) Вы знаете, что произведение нескольких множителей равно нулю тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, и наоборот, если хотя бы один из множителей равен нулю, то и произведение равно нулю. Поэтому для решения данного уравнения достаточно решить каждое из уравнений:

$$3x + 2{,}1 = 0, \quad 8 - 2x = 0.$$

Отсюда

$$x = -0{,}7 \quad \text{или} \quad x = 4.$$

Ответ: $-0{,}7$; 4.

2) Учитывая, что существуют только два числа, -4 и 4, модули которых равны 4, получаем:

$$5x - 6 = 4 \quad \text{или} \quad 5x - 6 = -4.$$

Отсюда

$$x = 2 \quad \text{или} \quad x = 0{,}4.$$

Ответ: 2; $0{,}4$. ◄

Обратим ваше внимание на то, что рассмотренные уравнения не являются линейными, однако решение каждого из них сводится к решению линейного уравнения.

Пример 2. Решите уравнение:

1) $(a - 1)x = 2$; 2) $(a + 9)x = a + 9$.

Решение. 1) При $a = 1$ уравнение принимает вид $0x = 2$. В этом случае корней нет. При $a \neq 1$ получаем: $x = \frac{2}{a-1}$.

Ответ: если $a = 1$, то уравнение не имеет корней; если $a \neq 1$, то $x = \frac{2}{a-1}$.

2) При $a = -9$ уравнение принимает вид $0x = 0$. В этом случае корнем уравнения является любое число. При $a \neq -9$ получаем: $x = 1$.

Ответ: если $a = -9$, то x — любое число; если $a \neq -9$, то $x = 1$. ◄

1. Какое уравнение называют линейным уравнением с одной переменной?

2. Сколько корней имеет линейное уравнение $ax = b$, если:
1) $a \neq 0$; 2) $a = 0$, $b \neq 0$; 3) $a = b = 0$?

Упражнения

33. Какие из данных уравнений являются линейными:

1) $3x = 6$; 3) $x^2 = 4$; 5) $\frac{4}{x} = 2$; 7) $x = 0$;

2) $x = 4$; 4) $|x| = 2$; 6) $\frac{1}{4}x = 2$; 8) $0x = 8$?

34. Решите уравнение:
1) $18 - 16x = -30x - 10$;
2) $-7x + 2 = 3x - 1$;
3) $10 - 2x = 12 + x$;
4) $6x - 19 = -2x - 15$;
5) $0{,}2x + 3{,}4 = 0{,}6x - 2{,}6$;
6) $\frac{5}{6}x + 12 = \frac{1}{4}x - 2$.

35. Найдите корень уравнения:
1) $10x + 7 = 8x - 9$;
2) $20 - 3x = 2x - 45$;
3) $2{,}7 + 1{,}9x = 2x + 1{,}5$;
4) $\frac{13}{18}x + 13 = \frac{7}{12}x + 8$.

36. Докажите, что:
1) корнем уравнения $4(x - 5) = 4x - 20$ является любое число;
2) уравнение $2y - 8 = 4 + 2y$ не имеет корней.

37. Решите уравнение:
1) $-3(x - 4) = 5x - 12$;
2) $(16x - 5) - (3 - 5x) = 6$;
3) $26 - 4x = 3x - 7(x - 3)$;
4) $-2(3 - 4x) + 5(2 - 1{,}6x) = 4$.

38. Решите уравнение:
1) $4(13 - 3x) - 17 = -5x$;
2) $(18 - 3x) - (4 + 2x) = 10$;
3) $14 - x = 0{,}5(4 - 2x) + 12$;
4) $4x - 3(20 - x) = 10x - 3(11 + x)$.