

 | российский учебник

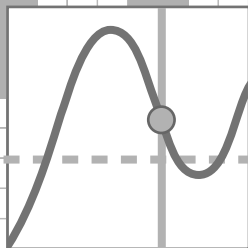
А. Г. Мерзляк  
В. Б. Полонский  
Е. М. Рабинович  
М. С. Якир

**Математика:**  
алгебра и начала  
математического анализа,  
геометрия

# АЛГЕБРА

И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Углублённый  
уровень



10  
класс

**Самостоятельные  
и контрольные работы**



Москва  
Издательский центр  
«Вентана-Граф»  
2020

УДК 373.167.1:512  
ББК 22.14я72  
М52

**Мерзляк, А. Г.**

М52 **Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углублённый уровень : 10 класс : самостоятельные и контрольные работы / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, Е. М. Рабинович, М. С. Якир. — М. : Вентана-Граф, 2020. — 125, [3] с. : ил. — (Российский учебник).**

**ISBN 978-5-360-10758-3**

Пособие содержит упражнения для самостоятельных и контрольных работ. Используется в комплекте с учебником «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа : 10 класс : углублённый уровень» (авт. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. М. Поляков).

Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего общего образования.

УДК 373.167.1:512  
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-360-10758-3

© Мерзляк А. Г., Полонский В. Б.,  
Рабинович Е. М., Якир М. С., 2020  
© Издательский центр «Вентана-Граф», 2020

## От авторов

Это пособие вместе с учебником для углублённого изучения математики «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс» авторов А. Г. Мерзляка, Д. А. Номировского, В. М. Полякова входят в один учебно-методический комплект.

Первая часть пособия — «Самостоятельные работы» — разделена на четыре однотипных варианта по 46 работ в каждом (самостоятельные работы, имеющие одинаковые номера, являются однотипными). Каждая самостоятельная работа соответствует определённому параграфу учебника, что отражено в названии самостоятельной работы. Наличие аналогичных задач в самостоятельных работах с одинаковыми номерами также позволяет использовать этот материал для отработки навыков решения основных типов задач.

Вторая часть пособия содержит задания для контрольных работ.

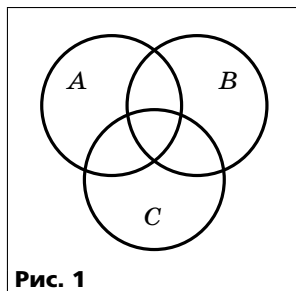
В пособии отсутствует раздел «Ответы». Это сделано специально, чтобы можно было использовать пособие как раздаточный дидактический материал на контрольных и проверочных работах.

## Вариант 1

### Самостоятельная работа № 1

#### Множества. Операции над множествами

- Какие из следующих утверждений верны:
  - $3 \in \{1, 3, 5\}$ ;
  - $\{1\} \in \{1, 3, 5\}$ ;
  - $5 \subset \{1, 3, 5\}$ ;
  - $\{5\} \subset \{1, 3, 5\}$ ;
  - $\emptyset \subset \{1, 3, 5\}$ ;
  - $\{\emptyset\} \in \{1, 3, 5\}$ ?
- Какие из следующих утверждений верны:
  - $\{3\} \cap \{3, 9\} = \{3, 9\}$ ;
  - $\{3\} \cap \{3, 9\} = \{3\}$ ;
  - $\{3\} \cup \{3, 9\} = \{9\}$ ;
  - $\{3\} \cup \{3, 9\} = \{3, 9\}$ ?
- Даны множества  $A = \{x | x^2 - 4 = 0\}$  и  $B = \{x | (x - 2)(x + 3) = 0\}$ . Найдите:
  - $A \cap B$ ;
  - $A \cup B$ ;
  - $A \setminus B$ ;
  - $B \setminus A$ .
- На диаграмме Эйлера (рис. 1) изображены множества  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Заштрихуйте множество:
  - $(A \cap C) \cup B$ ;
  - $(A \cup B) \setminus C$ ;
  - $(B \setminus C) \cap A$ .



### Самостоятельная работа № 2

#### Конечные и бесконечные множества

- Докажите, что множество точек сторон квадрата и множество точек описанной около этого квадрата окружности равномощны.

2. Каких натуральных чисел больше: четырёхзначных чисел или пятизначных чисел, кратных числу 10?
3. В спортивной школе 70 учащихся посещают баскетбольную секцию или легкоатлетическую секцию. Известно, что 15 из них посещают обе секции. Докажите, что хотя бы одну из секций посещают не меньше 43 учащихся.
4. Докажите, что множество натуральных чисел, кратных числу 7, равномощно множеству натуральных чисел, кратных числу 9.

### Самостоятельная работа № 3

#### Высказывания и операции над ними

1. Даны два высказывания:  $A \equiv \left\{ \frac{2}{5} = \frac{4}{10} \right\}$ ,  $B \equiv \{8 > 11\}$ .  
 Определите, истинным или ложным является высказывание:
  - 1)  $A \wedge \bar{B}$ ;
  - 2)  $\bar{A} \vee \bar{B}$ ;
  - 3)  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ ;
  - 4)  $\bar{A} \Leftrightarrow B$ .
2. Пусть  $f$  — функция истинности,  $A$  и  $B$  — некоторые высказывания. Известно, что  $f(B) = 0$  и  $f(A \wedge \bar{B}) = 0$ . Найдите  $f(A)$ .
3. Составьте таблицу истинности для логического выражения  $(A \vee \bar{B}) \Rightarrow C$ .

### Самостоятельная работа № 4

#### Предикаты. Операции над предикатами.

#### Виды теорем

1. На множестве всех упорядоченных пар  $(x; y)$  действительных чисел задан предикат  $A(x; y) \equiv \{x^2 + (y - 1)^2 = 0\}$ . Укажите область истинности этого предиката.
2. На множестве  $\mathbf{R}$  заданы предикаты  $A(x) \equiv \{x^2 - 2x = 0\}$  и  $B(x) \equiv \{x^2 - 4 = 0\}$ . Укажите область истинности предиката:
  - 1)  $A(x) \wedge B(x)$ ;
  - 2)  $A(x) \vee B(x)$ ;
  - 3)  $A(x) \Rightarrow B(x)$ ;
  - 4)  $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ .

**3.** Вместо \* поставьте один из кванторов  $\forall$  или  $\exists$ , чтобы образовалось истинное высказывание:

1)  $(*x \in \mathbf{R})(2x + 3 < 0)$ ;      2)  $(*x \in \mathbf{R})(x^2 - 2x + 3 \geq 2)$ .

**4.** Рассмотрим теорему: если в параллелограмме один из углов равен  $90^\circ$ , то этот параллелограмм является прямоугольником. Сформулируйте теорему:

- 1) противоположную данной;  
2) обратную противоположной.

### Самостоятельная работа № 5

#### **Функция и её свойства**

**1.** Исследуйте на чётность функцию:

1)  $f(x) = \frac{1}{x^3 + 2x}$ ;      3)  $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{2x - 8}$ .

2)  $f(x) = \sqrt{6 - x^2}$ ;

**2.** Найдите нули и промежутки знакопостоянства функции:

1)  $y = \sqrt{x^2 - 4x}$ ;      2)  $y = (x - 1)\sqrt{x^2 - 4x}$ .

**3.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $y = x^2 - 4x + 2$  на промежутке:

1)  $[-3; 1]$ ;      2)  $[1; 4]$ .

**4.** Найдите область значений функции  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 16}$ .

### Самостоятельная работа № 6

#### **Построение графиков функций с помощью геометрических преобразований**

**1.** Постройте график функции:

1)  $y = \frac{1}{3x + 1}$ ;      2)  $y = \left| \frac{1}{3x + 1} \right|$ .

**2.** Постройте график функции:

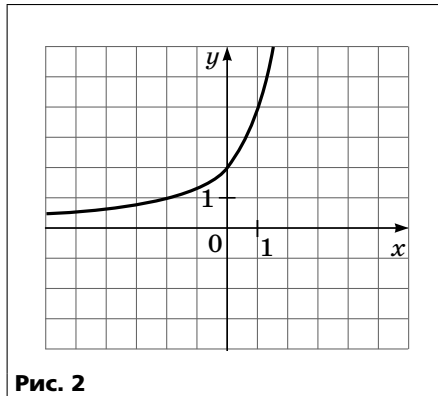
1)  $y = \sqrt{3 - 2x}$ ;      2)  $y = \sqrt{3 - 2|x|}$ .

3. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $|4|x| - 1| = a(x + 2)$  имеет три корня?

**Самостоятельная работа № 7**

**Обратная функция**

- Какие из функций являются обратимыми:
  - $y = 3x - 2$ ;
  - $y = x^2, D(y) = [-2; +\infty)$ ?
  - $y = x^2, D(y) = [1; +\infty)$ ;
- Найдите функцию, обратную к данной:
  - $y = 2x + 4$ ;
  - $y = 1 + \sqrt{x + 3}$ .
- С помощью графика функции  $f$ , изображённого на рисунке 2, постройте график функции  $g$ , обратной к функции  $f$ .



**Рис. 2**

4. Функция  $g$  является обратной к функции  $f(x) = x^3 + x - 27$ . Решите уравнение  $f(x) = g(x)$ .

**Самостоятельная работа № 8**

**Метод интервалов**

- Решите неравенство:
  - $(x^2 + 5x)(x^2 - 16) \geq 0$ ;
  - $(x - 2)^2(x^2 - 4x + 3) \geq 0$ ;

$$3) \frac{x^2 + 7x}{x + 3} \leq \frac{8}{x + 3};$$

$$4) (x^2 - 6x + 8)\sqrt{x^2 + 10x + 9} \leq 0.$$

2. Найдите множество решений неравенства  $(x + 6)(x - a)^2 \leq 0$  в зависимости от значения параметра  $a$ .

### Самостоятельная работа № 9

#### **Степенная функция с натуральным показателем**

1. Функция задана формулой  $f(x) = x^8$ . Сравните:
- |                             |                           |
|-----------------------------|---------------------------|
| 1) $f(2,4)$ и $f(3,8)$ ;    | 3) $f(-9,6)$ и $f(9,6)$ ; |
| 2) $f(-8,7)$ и $f(-10,3)$ ; | 4) $f(-0,8)$ и $f(0,4)$ . |
2. Определите графически количество корней уравнения:
- |                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| 1) $-x^8 = x - 4$ ; | 2) $x^5 = 2x - 5$ . |
|---------------------|---------------------|
3. Чётным или нечётным натуральным числом является показатель степени  $n$  функции  $y = x^n$ , если:
- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| 1) $f(-5) > f(-3)$ ; | 3) $f(-5) < f(-3)$ ; |
| 2) $f(-5) < f(3)$ ;  | 4) $f(-5) > f(3)$ ?  |
4. Решите уравнение  $5x^{10} + 3x^6 = 8$ .

### Самостоятельная работа № 10

#### **Степенная функция с целым показателем**

1. Дана функция  $f(x) = x^{-32}$ . Сравните:
- |                            |                         |
|----------------------------|-------------------------|
| 1) $f(7,2)$ и $f(6,5)$ ;   | 3) $f(42)$ и $f(-42)$ ; |
| 2) $f(-1,5)$ и $f(-1,8)$ ; | 4) $f(-10)$ и $f(6)$ .  |
2. Постройте график функции:
- |                             |                          |
|-----------------------------|--------------------------|
| 1) $y = (\sqrt{x} - 1)^0$ ; | 2) $y = (x^{-2})^{-2}$ . |
|-----------------------------|--------------------------|
3. Определите графически количество решений системы уравнений:
- |   |   |
|---|---|
| 1) $\begin{cases} y = -x^{-5}, \\ y = 3 - x; \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} y = x^{-4}, \\ y = \sqrt{x - 3}. \end{cases}$ |
|---|---|



4. Чётным или нечётным является натуральное число  $n$  в показателе степени функции  $f(x) = x^{-n}$ , если:

- 1)  $f(-12) < f(-16)$ ;                      3)  $f(-12) > f(-16)$ ;  
 2)  $f(-12) < f(16)$ ;                      4)  $f(16) < f(12)$ ?

**Самостоятельная работа № 11**

**Определение корня  $n$ -й степени. Функция  $y = \sqrt[n]{x}$**

1. Вычислите  $4\left(-\sqrt[8]{6}\right)^8 - 0,8\sqrt[4]{10\,000} + \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{270}\right)^3$ .

2. Постройте график функции:

1)  $y = \left(\sqrt[11]{-x+1}\right)^{11}$ ;                      2)  $y = \left(\sqrt[6]{x-2}\right)^6$ .

3. Решите неравенство:

1)  $\sqrt[4]{4x+1} \leq 5$ ;                      2)  $\sqrt[12]{x^2-8} > \sqrt[12]{7x}$ .

4. Для каждого значения параметра  $a$  решите уравнение:

1)  $(a-1)\sqrt[8]{x} = 0$ ;                      2)  $ax^8 = 6$ .

5. Решите систему уравнений  $\begin{cases} x + \sqrt[10]{x} = y + \sqrt[10]{y}, \\ 5y^2 - x^2 = 4. \end{cases}$

**Самостоятельная работа № 12**

**Свойства корня  $n$ -й степени**

1. Найдите значение выражения:

1)  $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2}$ ;                      2)  $\sqrt[8]{3^5 \cdot 5^2} \cdot \sqrt[8]{3^3 \cdot 5^6}$ ;                      3)  $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{729}}$ .

2. Упростите выражение:

1)  $\sqrt[5]{\sqrt[4]{m}}$ ;                      3)  $\sqrt[10]{x^{14}}$ ;                      5)  $\sqrt[8]{c^5 \sqrt[5]{c^3}}$ .  
 2)  $\sqrt[24]{a^{32}}$ ;                      4)  $\sqrt[4]{2\sqrt[6]{3}}$ ;

3. Вынесите множитель из-под знака корня:

1)  $\sqrt[3]{54}$ ;                      2)  $\sqrt[4]{405}$ .

4. Внесите множитель под знак корня:

1)  $-2\sqrt[3]{5}$ ;      2)  $-10\sqrt[4]{0,312}$ .

5. Сократите дробь:

1)  $\frac{\sqrt[3]{a} - 1}{\sqrt[6]{a} + 1}$ ;      2)  $\frac{\sqrt{a} - \sqrt[4]{a}}{a - \sqrt[4]{a^3}}$ ;      3)  $\frac{x + 8}{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 4}$ .

### Самостоятельная работа № 13

#### Свойства корня $n$ -й степени

1. Сравните:

1)  $\sqrt[4]{7}$  и  $\sqrt[3]{5}$ ;      2)  $\sqrt[4]{6}$  и  $\sqrt[6]{15}$ .

2. Постройте график функции:

1)  $y = \sqrt[6]{(x + 2)^6}$ ;      2)  $y = \sqrt[8]{(x - 3)^5} \cdot \sqrt[8]{(x - 3)^3}$ .

3. Вынесите множитель из-под знака корня:

1)  $\sqrt[4]{x^9}$ ;      3)  $\sqrt[4]{x^{10}y^5}$ ;      5)  $\sqrt[4]{a^6b^5}$ , если  $a \leq 0$ ;  
 2)  $\sqrt[3]{-a^{10}}$ ;      4)  $\sqrt[4]{-16x^7}$ ;      6)  $\sqrt[8]{-a^{17}b^{26}}$ , если  $b \leq 0$ .

4. Внесите множитель под знак корня:

1)  $3y\sqrt[5]{2y^2}$ ;      4)  $c\sqrt[8]{c^6}$ , если  $c \leq 0$ ;  
 2)  $m\sqrt{-m^3}$ ;      5)  $x^3y^7\sqrt[10]{x^8y^{12}}$ , если  $x < 0$ ,  $y > 0$ .  
 3)  $m\sqrt[4]{m^5}$ ;

5. Упростите выражение  $\left( \frac{\sqrt[4]{a} + 4}{\sqrt[4]{a} - 4} - \frac{\sqrt[4]{a} - 4}{\sqrt[4]{a} + 4} \right) \cdot \frac{16 - \sqrt{a}}{32\sqrt[4]{a^3}}$ .

### Самостоятельная работа № 14

#### Степень с рациональным показателем и её свойства

1. Найдите значение выражения:

1)  $27^{\frac{1}{3}}$ ;      2)  $64^{\frac{5}{6}}$ ;      3)  $\left( 2\frac{23}{49} \right)^{1,5}$ .

2. Найдите область определения функции:

1)  $y = (x + 4)^{1,2}$ ;      2)  $y = (x^2 + 8x - 9)^{\frac{1}{5}}$ .

**3. Упростите выражение:**

- 1)  $y^{3,4} \cdot y^{-1,8}$ ;      4)  $\left(x^{\frac{10}{21}} y^{\frac{16}{35}}\right)^{\frac{49}{20}}$ ;  
 2)  $y^{\frac{15}{28}} : y^{\frac{6}{7}}$ ;      5)  $\left(\sqrt[5]{a^{-4}}\right)^{\frac{5}{16}} \cdot \left(a^{-\frac{7}{8}}\right)^{\frac{4}{21}}$ .  
 3)  $(y^{-4})^{0,9}$ ;

**4. Постройте график функции  $y = \left((x+4)^{\frac{1}{7}}\right)^{-7}$ .**

**5. Упростите выражение  $\frac{x^{\frac{1}{8}} + 8}{x^{\frac{1}{4}} + 4x^{\frac{1}{8}}} - \frac{x^{\frac{1}{8}} + 1}{3x^{\frac{1}{8}} + 12} - \frac{6 - x^{\frac{1}{8}}}{3x^{\frac{1}{8}}}$ .**

### Самостоятельная работа № 15

#### **Иррациональные уравнения**

Решите уравнение:

- 1)  $\sqrt[12]{2x-3} = \sqrt[12]{x^2+x-23}$ ;  
 2)  $\sqrt{7-x} = x-1$ ;  
 3)  $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4} = 2x-6$ ;  
 4)  $\sqrt{x+10} - \sqrt{x-5} = 3$ ;  
 5)  $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 6$ .

### Самостоятельная работа № 16

#### **Различные приёмы решения иррациональных уравнений и их систем**

Решите уравнение (систему уравнений):

- 1)  $\sqrt{x+3} - 3\sqrt[4]{x+3} + 2 = 0$ ;  
 2)  $\sqrt{\frac{2-x}{x+4}} + \sqrt{\frac{x+4}{2-x}} = 2$ ;

$$3) 5x^2 - 20x + 6 - 2\sqrt{x^2 - 4x + 9} = 0;$$

$$4) \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 2, \\ xy = -27; \end{cases}$$

$$5) \sqrt[3]{x-7} + \sqrt[3]{9-x} = 2.$$

### Самостоятельная работа № 17

#### Иррациональные неравенства

1. Решите неравенство:

$$1) \sqrt{3x-10} > \sqrt{6-x};$$

$$3) \sqrt{x+33} > x+3;$$

$$2) \sqrt{4x^2+5x+1} < x-1;$$

$$4) (8-3x)\sqrt{x-2} \leq 0;$$

2. Для каждого значения параметра  $a$  решите неравенство  $a\sqrt{x-2} < 1$ .

### Самостоятельная работа № 18

#### Радианная мера угла

1. Найдите радианную меру угла, равного:

$$1) 18^\circ;$$

$$2) 240^\circ.$$

2. Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна:

$$1) \frac{\pi}{30};$$

$$2) 1\frac{3}{4}\pi.$$

3. В какой координатной четверти находится точка единичной окружности, полученная при повороте точки  $P_0(1; 0)$  на угол:

$$1) 138^\circ;$$

$$2) \frac{\pi}{7};$$

$$3) -\frac{11\pi}{6};$$

$$4) -3?$$

4. Найдите все углы, на которые нужно повернуть точку  $P_0(0; 1)$ , чтобы получить точку:

$$1) P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$2) P_2\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

5. Найдите координаты точек единичной окружности, полученных при повороте точки  $P_0(1; 0)$  на углы:

1)  $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z};$       2)  $\frac{\pi k}{4}, k \in \mathbf{Z}.$

**Самостоятельная работа № 19**

**Тригонометрические функции  
числового аргумента**

1. Найдите значение выражения:

1)  $2\cos 0^\circ + 5\sin 90^\circ - 4\operatorname{tg} 180^\circ;$

2)  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} + 3\cos \frac{\pi}{2} - 4\sin \frac{3\pi}{2};$

3)  $\frac{\left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} 2\pi}.$

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1)  $1 + 3\sin \alpha;$       3)  $\frac{\cos \alpha(1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha}.$

2)  $\cos^2 \alpha - 5;$

3. Найдите область значений выражения:

1)  $\operatorname{tg}^6 x - 4;$       3)  $\frac{1}{\sin 4x - 1}.$

2)  $\frac{1}{4 + \cos 5x};$

**Самостоятельная работа № 20**

**Знаки значений тригонометрических функций.**

**Чётность и нечётность тригонометрических функций**

1. Найдите значение выражения

$2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 10\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right).$