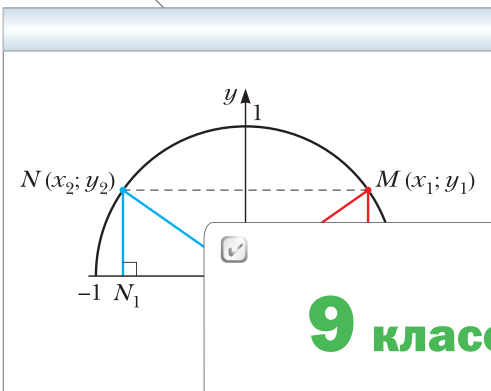
А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонский
М. С. Якир

Геометрия



9 класс

Учебник

Под редакцией В. Е. Подольского

4-е издание, стереотипное

Рекомендовано
Министерством просвещения
Российской Федерации

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2020

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
М52

Одобрено Научно-редакционным советом корпорации «Российский учебник» под председательством академиков Российской академии наук В. А. Тишкова и В. А. Черешнева

Под редакцией проректора МГУ им. М. В. Ломоносова, доктора физико-математических наук В. Е. Подольского

Мерзляк, А. Г.

М52 Геометрия : 9 класс : учебник / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир ; под ред. В. Е. Подольского. — 4-е изд., стереотип. — М. : Вентана-Граф, 2020. — 256 с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-360-11384-3

Учебник предназначен для изучения геометрии в 9 классе общеобразовательных организаций. В нём предусмотрена уровневая дифференциация, позволяющая формировать у школьников познавательный интерес к математике.

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

РОССИЙСКИЙ УЧЕБНИК

Учебное издание

Мерзляк Аркадий Григорьевич, **Полонский** Виталий Борисович
Якир Михаил Семёнович

Геометрия. 9 класс. Учебник

Редактор *Е. В. Буцко*. Художественный редактор *Е. В. Чайко*
Внешнее оформление *К. В. Бычкова*. Художники *Н. К. Вахонина, М. А. Хавторин, Е. Е. Исакова*. Фотографии *В. А. Андрианова, С. С. Митурича, «Фотобанк Лори» (Наталья Крупская), ООО «ТРИ КВАДРАТА», Shutterstock/FOTODOM*
Компьютерная вёрстка *О. В. Поповой*. Технический редактор *Л. В. Коновалова*
Корректоры *О. А. Мерзликина, Ю. С. Борисенко*

Подписано в печать 18.06.19. Формат 70×90/16. Гарнитура NewBaskervilleITC
Печать офсетная. Печ. л. 16,0. Тираж 15 000 экз. Заказ №

ООО Издательский центр «Вентана-Граф». 123308, г. Москва, ул. Зорге, д. 1, эт. 5

росучебник.рф/метод

Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги можно отправлять по электронному адресу: expert@rosuchebnik.ru
По вопросам приобретения продукции издательства обращайтесь: тел.: 8-800-700-64-83; e-mail: sales@rosuchebnik.ru
Электронные формы учебников, другие электронные материалы и сервисы: lecta.rosuchebnik.ru, тел.: 8-800-555-46-68
В помощь учителю и ученику: регулярно пополняемая библиотека дополнительных материалов к урокам, конкурсы и акции с поощрением победителей, рабочие программы, вебинары и видеозаписи открытых уроков росучебник.рф/метод

ISBN 978-5-360-11384-3

От авторов

Дорогие девятиклассники!

В этом учебном году вы продолжите изучение геометрии. Надеемся, что вы успели полюбить эту важную и красивую науку, а значит, с интересом будете овладевать новыми знаниями. Хотелось бы верить, что этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках.

Учебник разделён на шесть глав, каждая из которых состоит из параграфов. В параграфах изложен теоретический материал. Особое внимание обращайте на текст, выделенный **жирным шрифтом**. Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Их можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи. Свои знания можно проверить, выполняя задания в тестовой форме из рубрики «Проверьте себя».

Если после выполнения домашних заданий остаётся свободное время и вы хотите узнать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный в ней, непростой. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

Условные обозначения

○ Простые задачи

○○ Задачи средней сложности

✧ Сложные задачи

✲ Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

◄ Окончание доказательства теоремы или решения задачи

510 Задания, рекомендуемые для домашней работы

327 Задания для устной работы

Глава 1. Решение треугольников

В этой главе вы узнаете, что такое синус, косинус, тангенс и котангенс угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Вы научитесь по двум сторонам треугольника и углу между ними находить третью сторону, а также по стороне и двум прилежащим к ней углам находить две другие стороны треугольника.

В 8 классе вы научились решать прямоугольные треугольники. Изучив материал этой главы, вы сможете решать произвольные треугольники.

Вы узнаете новые формулы, с помощью которых можно находить площадь треугольника.

§ 1. Тригонометрические функции угла от 0° до 180°

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить содержание пункта 36 на с. 241.

Понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла вам знакомы из курса геометрии 8 класса. Расширим эти понятия для любого угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

В верхней полуплоскости координатной плоскости рассмотрим полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 1). Такую полуокружность называют **единичной**.

Будем говорить, что **углу** α $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$ **соответствует точка** M единичной полуокружности, если $\angle MOA = \alpha$, где точки O и A имеют соответственно координаты $(0; 0)$ и $(1; 0)$ (см. рис. 1). Например, на рисунке 1 углу, равному $90°$, соответствует точка C; углу, равному $180°$, — точка B; углу, равному $0°$, — точка A.

Рис. 1

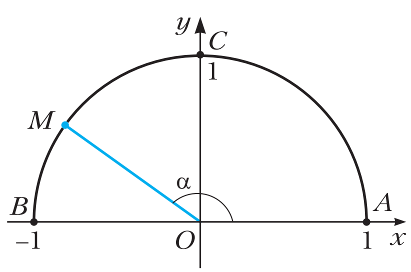
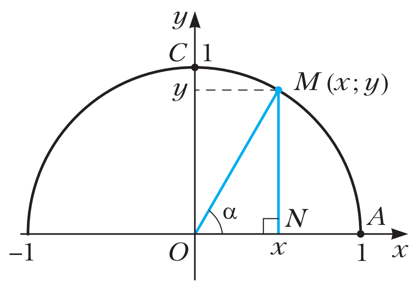


Рис. 2



Пусть α — острый угол. Ему соответствует некоторая точка M $(x; y)$ дуги AC единичной полуокружности (рис. 2). В прямоугольном треугольнике OMN имеем:

$$\cos\alpha = \frac{ON}{OM}, \ \sin\alpha = \frac{MN}{OM}.$$

Поскольку $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, то $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$.

Итак, косинус и синус острого угла α, которому соответствует точка M единичной полуокружности, — это соответственно абсцисса и ордината точки M.

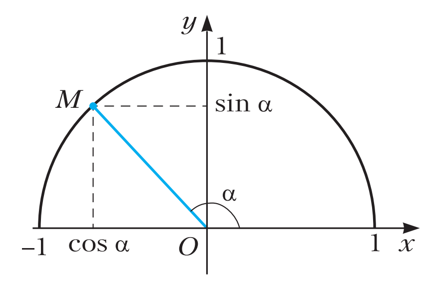
Полученный результат подсказывает, как определить синус и косинус любого угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Определение

Косинусом и синусом угла α $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$, которому соответствует точка M единичной полуокружности, называют соответственно абсциссу и ординату точки M (рис. 3)**.**

Пользуясь этим определением, можно, например, установить, что: $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$.

Рис. 3



Если M $(x; y)$ — произвольная точка единичной полуокружности, то $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$. Следовательно, для любого угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, имеем:

$$0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Если α — тупой угол, то абсцисса точки, соответствующей этому углу, отрицательна. Следовательно, косинус тупого угла является отрицательным числом. Справедливо и такое утверждение: если $\cos\alpha < 0$, то α — тупой или развёрнутый угол.

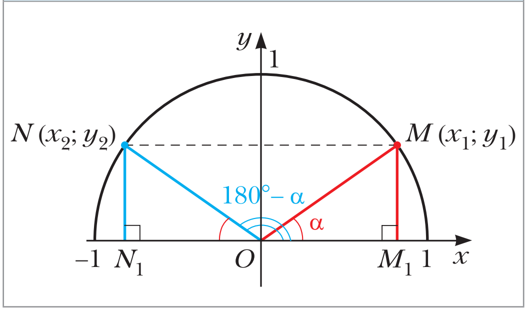
Из курса геометрии 8 класса вы знаете, что для любого острого угла α выполняются равенства:

$$\boxed{\begin{gathered}\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha,\\ \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha\end{gathered}}$$

Эти формулы остаются справедливыми и для $\alpha = 0°$, и для $\alpha = 90°$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Пусть углам α и $180^\circ - \alpha$, где $\alpha \neq 0^\circ$, $\alpha \neq 90^\circ$ и $\alpha \neq 180^\circ$, соответствуют точки $M\ (x_1;\ y_1)$ и $N\ (x_2;\ y_2)$ единичной полуокружности (рис. 4).

Рис. 4



Прямоугольные треугольники OMM_1 и ONN_1 равны по гипотенузе и острому углу ($ON = OM = 1$, $\angle MOM_1 = \angle NON_1 = \alpha$). Отсюда $y_2 = y_1$ и $x_2 = -x_1$. Следовательно:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

Убедитесь самостоятельно, что эти равенства остаются верными для $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 180^\circ$.

Если α — острый угол, то, как вы знаете из курса геометрии 8 класса, справедливо равенство, которое называют **основным тригонометрическим тождеством**:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Оно остаётся верным для $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 180^\circ$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Пусть α — тупой угол, тогда угол $180^\circ - \alpha$ является острым. Имеем:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (\sin(180^\circ - \alpha))^2 + (-\cos(180^\circ - \alpha))^2 =$
$= \sin^2(180^\circ - \alpha) + \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1.$

Следовательно, равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ выполняется для всех $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$.

Определение

Тангенсом угла α, где $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$ и $\alpha \neq 90^\circ$, называют отношение $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Поскольку $\cos 90^\circ = 0$, то $\operatorname{tg}\alpha$ не определён для $\alpha = 90^\circ$.

Определение

Котангенсом угла α, где $0° < \alpha < 180°$, называют отношение $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, т. е.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Поскольку $\sin 0° = \sin 180° = 0$, то $\operatorname{ctg}\alpha$ не определён для $\alpha = 0°$ и $\alpha = 180°$.

Очевидно, что каждому углу α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) соответствует *единственная* точка единичной полуокружности. Значит, каждому углу α соответствует единственное число, которое является значением синуса (косинуса, тангенса для $\alpha \neq 90°$, котангенса для $\alpha \neq 0°$ и $\alpha \neq 180°$). Поэтому зависимость значения синуса (косинуса, тангенса, котангенса) от величины угла является функциональной.

Функции $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, $p(\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, соответствующие этим функциональным зависимостям, называют **тригонометрическими функциями** угла α.

Задача 1. Докажите, что $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$.

$\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = \frac{\cos(180° - \alpha)}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha$. ◄

Задача 2. Найдите $\sin 120°$, $\cos 120°$, $\operatorname{tg} 120°$, $\operatorname{ctg} 120°$.

Решение. $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$;

$\operatorname{tg} 120° = \operatorname{tg}(180° - 60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$;

$\operatorname{ctg} 120° = \operatorname{ctg}(180° - 60°) = -\operatorname{ctg} 60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. ◄

1. Какую полуокружность называют единичной?
2. Объясните, в каком случае говорят, что углу α соответствует точка M единичной полуокружности.
3. Что называют синусом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?

4. Что называют косинусом угла α, где $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$?
5. Чему равен $\sin 0^\circ$, $\cos 0^\circ$, $\sin 90^\circ$, $\cos 90^\circ$, $\sin 180^\circ$, $\cos 180^\circ$?
6. В каких пределах находятся значения $\sin\alpha$, если $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$?
7. В каких пределах находятся значения $\cos\alpha$, если $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$?
8. Каким числом, положительным или отрицательным, является синус острого угла? Синус тупого угла? Косинус острого угла? Косинус тупого угла?
9. Каким углом является угол α, если $\cos\alpha < 0$?
10. Чему равен $\sin(180^\circ - \alpha)$, $\cos(180^\circ - \alpha)$?
11. Как связаны между собой синус и косинус одного и того же угла?
12. Что называют тангенсом угла α, где $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$ и $\alpha \neq 90^\circ$?
13. Что называют котангенсом угла α, где $0^\circ < \alpha < 180^\circ$?
14. Почему $\operatorname{tg}\alpha$ не определён для $\alpha = 90^\circ$?
15. Почему $\operatorname{ctg}\alpha$ не определён для $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 180^\circ$?
16. Как называют функции $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ и $p(\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$?

Практическое задание

1. Начертите единичную полуокружность, взяв за единичный такой отрезок, длина которого в 5 раз больше стороны клетки тетради. Постройте угол, вершиной которого является начало координат, а одной из сторон — положительная полуось оси абсцисс:

1) косинус которого равен $\frac{1}{5}$;
2) косинус которого равен $-0{,}4$;
3) синус которого равен $0{,}6$;
4) синус которого равен 1;
5) косинус которого равен 0;
6) косинус которого равен -1.

Упражнения

2. Чему равен:
1) $\sin(180^\circ - \alpha)$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$;
2) $\cos(180^\circ - \alpha)$, если $\cos\alpha = 0{,}7$;
3) $\cos(180^\circ - \alpha)$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{9}$;
4) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -5$;
5) $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha)$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{3}$?

3. Углы α и β смежные, $\cos\alpha = -\frac{1}{6}$.

1) Найдите $\cos\beta$.

2) Какой из углов α и β является острым, а какой — тупым?

4. Найдите значение выражения:

1) $2\sin 90° + 3\cos 0°$;

2) $3\sin 0° - 5\cos 180°$;

3) $\mathrm{tg}\, 23° \cdot \mathrm{tg}\, 0° \cdot \mathrm{tg}\, 106°$;

4) $6\mathrm{tg}\, 180° + 5\sin 180° + \mathrm{ctg}\, 90°$;

5) $\cos^2 165° + \sin^2 165°$;

6) $\frac{\sin 0° + \sin 90°}{\cos 0° - \cos 90°}$.

5. Вычислите:

1) $4\cos 90° + 2\cos 180° - \mathrm{ctg}\, 90°$;

2) $\cos 0° - \cos 180° + \sin 90°$.

6. Чему равен синус угла, если его косинус равен: 1) 1; 2) 0? Чему равен тангенс угла, если его котангенс равен: 1) 1; 2) $-\frac{1}{3}$?

7. Чему равен косинус угла, если его синус равен: 1) 1; 2) 0?
Чему равен котангенс угла, если его тангенс равен: 1) -1; 2) 3?

8. Найдите $\sin 135°$, $\cos 135°$, $\mathrm{tg}\, 135°$, $\mathrm{ctg}\, 135°$.

9. Найдите $\sin 150°$, $\cos 150°$, $\mathrm{tg}\, 150°$, $\mathrm{ctg}\, 150°$.

10. Существует ли угол α, для которого:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$;

2) $\sin\alpha = 0{,}3$;

3) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$;

4) $\cos\alpha = -0{,}99$;

5) $\cos\alpha = 1{,}001$;

6) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$?

11. Найдите:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$;

2) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$;

3) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$;

4) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$;

5) $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $90° < \alpha \leqslant 180°$;

6) $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ и $0° < \alpha \leqslant 90°$.

12. Найдите:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{5}{13}$;

2) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{6}$;

3) $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ и $0° \leqslant \alpha < 90°$;

4) $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$.

13. Верно ли утверждение (ответ обоснуйте):
1) косинус острого угла больше косинуса тупого угла;
2) существует угол, синус и косинус которого равны;
3) существует угол, синус и косинус которого равны нулю;
4) косинус угла треугольника может быть равным отрицательному числу;
5) синус угла треугольника может быть равным отрицательному числу;
6) косинус угла треугольника может быть равным нулю;
7) синус угла треугольника может быть равным нулю;
8) косинус угла треугольника может быть равным -1;
9) синус угла треугольника может быть равным 1;
10) синус угла, отличного от прямого, меньше синуса прямого угла;
11) косинус развёрнутого угла меньше косинуса угла, отличного от развёрнутого;
12) синусы смежных углов равны;
13) косинусы неравных смежных углов являются противоположными числами;
14) если косинусы двух углов равны, то равны и сами углы;
15) если синусы двух углов равны, то равны и сами углы;
16) тангенс острого угла больше тангенса тупого угла;
17) тангенс острого угла больше котангенса тупого угла?

14. Сравните с нулём значение выражения:
1) $\sin 110^\circ \cos 140^\circ$;
2) $\sin 80^\circ \cos 100^\circ \cos 148^\circ$;
3) $\sin 128^\circ \cos^2 130^\circ \operatorname{tg} 92^\circ$;
4) $\sin 70^\circ \cos 90^\circ \operatorname{tg} 104^\circ$;
5) $\operatorname{ctg} 100^\circ \sin 114^\circ \cos 11^\circ$;
6) $\cos 85^\circ \sin 171^\circ \operatorname{ctg} 87^\circ$.

15. Найдите значение выражения:
1) $2\sin 120^\circ + 4\cos 150^\circ - 2\operatorname{tg} 135^\circ$;
2) $\cos 120^\circ - 8\sin^2 150^\circ + 3\cos 90^\circ \cos 162^\circ$;
3) $\cos 180^\circ(\sin 135^\circ \operatorname{tg} 60^\circ - \cos 135^\circ)^2$;
4) $2\sin^2 150^\circ + \cos^2 60^\circ + \sin^2 45^\circ + \operatorname{tg}^2 120^\circ - \operatorname{ctg}^2 30^\circ$.

16. Чему равно значение выражения:
1) $2\sin 150^\circ - 4\cos 120^\circ$;
2) $\operatorname{tg} 45^\circ \sin 120^\circ \operatorname{ctg} 150^\circ$;
3) $\sin 90^\circ(\operatorname{tg} 150^\circ \cos 135^\circ - \operatorname{tg} 120^\circ \cos 135^\circ)^2$?

17. Найдите значение выражения, не пользуясь таблицами и калькулятором:
1) $\dfrac{\sin 18^\circ}{\sin 162^\circ}$; 2) $\dfrac{\cos 18^\circ}{\cos 162^\circ}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg} 18^\circ}{\operatorname{tg} 162^\circ}$; 4) $\dfrac{\operatorname{ctg} 18^\circ}{\operatorname{ctg} 162^\circ}$.

18. Найдите значение выражения, не пользуясь таблицами и калькулятором:
1) $\dfrac{\sin 28^\circ}{\sin 152^\circ}$; 2) $\dfrac{\cos 49^\circ}{\cos 131^\circ}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg} 12^\circ}{\operatorname{tg} 168^\circ}$.

19. Найдите сумму квадратов синусов всех углов прямоугольного треугольника.

20. Найдите сумму квадратов косинусов всех углов прямоугольного треугольника.

21. В треугольнике ABC известно, что $\angle B = 60^\circ$, точка O — центр вписанной окружности. Чему равен косинус угла AOC?

22. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, $\cos \angle BOC = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите угол A треугольника.

Упражнения для повторения

23. Высота параллелограмма, проведённая из вершины тупого угла, равна 5 см и делит сторону параллелограмма пополам. Острый угол параллелограмма равен 30°. Найдите диагональ параллелограмма, проведённую из вершины тупого угла, и углы, которые она образует со сторонами параллелограмма.

24. Прямая CE параллельна боковой стороне AB трапеции $ABCD$ и делит основание AD на отрезки AE и DE такие, что $AE = 7$ см, $DE = 10$ см. Найдите среднюю линию трапеции.

Готовимся к изучению новой темы

25. Две стороны треугольника равны 8 см и 11 см. Может ли угол, противолежащий стороне длиной 8 см, быть: 1) тупым; 2) прямым? Ответ обоснуйте.

26. В треугольнике ABC проведена высота BD, $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $AB = 10$ см. Найдите сторону BC.

27. Найдите высоту BD треугольника ABC и проекцию стороны AB на прямую AC, если $\angle BAC = 150^\circ$, $AB = 12$ см.

§ 2. Теорема косинусов

Из первого признака равенства треугольников следует, что две стороны и угол между ними однозначно определяют треугольник. А значит, по указанным элементам можно, например, найти третью сторону треугольника. Как это сделать, показывает следующая теорема.

Теорема 2.1

(теорема косинусов)

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон и косинуса угла между ними.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC. Докажем, например, что
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

Возможны три случая:

1) угол A — острый;
2) угол A — тупой;
3) угол A — прямой.

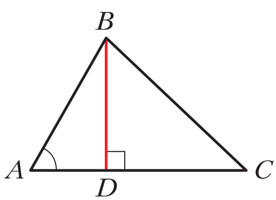
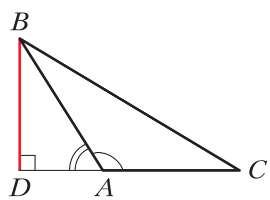
Первый случай. Пусть угол A — острый. Тогда хотя бы один из углов B или C является острым.

• Пусть $\angle C < 90^\circ$. Проведём высоту BD. Она будет полностью принадлежать треугольнику ABC (рис. 5).

В прямоугольном треугольнике ABD: $BD = AB \cdot \sin A$, $AD = AB \cdot \cos A$.
В прямоугольном треугольнике BDC: $BC^2 = BD^2 + CD^2 =$
$= BD^2 + (AC - AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 =$
$= AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A =$
$= AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A =$
$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

• Пусть $\angle B < 90^\circ$. Проведём высоту треугольника ABC из вершины C. Она будет полностью принадлежать треугольнику ABC. Доказательство этого случая аналогично рассмотренному. Проведите его самостоятельно.

Второй случай. Пусть угол A — тупой. Проведём высоту BD треугольника ABC (рис. 6).

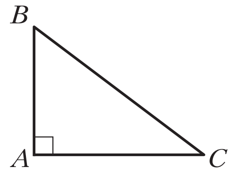
Рис. 5	Рис. 6
	

В прямоугольном треугольнике ABD: $BD = AB \cdot \sin \angle BAD =$
$= AB \cdot \sin (180^\circ - A) = AB \cdot \sin A$,
$AD = AB \cdot \cos \angle BAD = AB \cdot \cos (180^\circ - A) = -AB \cdot \cos A$.

В прямоугольном треугольнике BDC: $BC^2 = BD^2 + CD^2 = BD^2 + (AC + AD)^2 =$
$= AB^2 \cdot \sin^2 \angle BAC + (AC - AB \cdot \cos \angle BAC)^2 =$
$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$.

Третий случай. Пусть угол A — прямой (рис. 7). Тогда $\cos A = 0$. Надо доказать, что $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Это равенство следует из теоремы Пифагора для треугольника ABC. ◄

Рис. 7



Доказательство теоремы косинусов показывает, что *теорема Пифагора является частным случаем теоремы косинусов, а теорема косинусов является обобщением теоремы Пифагора.*

С помощью теоремы косинусов, зная три стороны треугольника, можно определить, является ли он остроугольным, тупоугольным или прямоугольным.

Теорема 2.2

Пусть a, b и c — стороны треугольника, причём a — его наибольшая сторона. Если $a^2 < b^2 + c^2$, то треугольник остроугольный. Если $a^2 > b^2 + c^2$, то треугольник тупоугольный. Если $a^2 = b^2 + c^2$, то треугольник прямоугольный.

Доказательство

Пусть угол, противолежащий наибольшей стороне данного треугольника, равен α.

По теореме косинусов:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

Отсюда $2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$.

Если $a^2 < b^2 + c^2$, то $b^2 + c^2 - a^2 > 0$. Следовательно, $2bc \cos \alpha > 0$, т. е. $\cos \alpha > 0$. Поэтому угол α — острый.

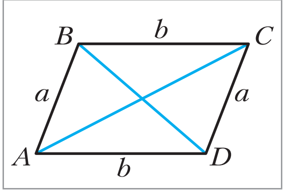
Поскольку a — наибольшая сторона треугольника, то против неё лежит наибольший угол, который, как мы доказали, является острым. Следовательно, в этом случае треугольник является остроугольным.

Если $a^2 > b^2 + c^2$, то $b^2 + c^2 - a^2 < 0$. Значит, $2bc \cos \alpha < 0$, т. е. $\cos \alpha < 0$. Следовательно, угол α — тупой. В этом случае треугольник является тупоугольным.

Если $a^2 = b^2 + c^2$, тогда $2bc \cos \alpha = 0$. Следовательно, $\cos \alpha = 0$. Отсюда $\alpha = 90^\circ$. В этом случае треугольник является прямоугольным. ◄

Задача 1. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Рис. 8



Решение. На рисунке 8 изображён параллелограмм $ABCD$.

Пусть $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $\angle BAD = \alpha$. Тогда $\angle ADC = 180^\circ - \alpha$.

По теореме косинусов для треугольника ABD:

$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$. (*)

По теореме косинусов для треугольника ACD:

$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \alpha)$.

Отсюда $AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$. (**)

Сложив равенства (*) и (**), получим

$BD^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2$. ◄

Задача 2. В треугольнике ABC сторона AB на 4 см больше стороны BC, $\angle B = 120^\circ$, $AC = 14$ см. Найдите стороны AB и BC.

Решение. По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos B$.

Пусть $BC = x$ см ($x > 0$), тогда $AB = (x + 4)$ см.

Имеем:

$14^2 = (x + 4)^2 + x^2 - 2x(x + 4)\cos 120^\circ$;

$196 = x^2 + 8x + 16 + x^2 - 2x(x + 4) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$;

$196 = 2x^2 + 8x + 16 + x(x + 4)$;

$3x^2 + 12x - 180 = 0$;

$x^2 + 4x - 60 = 0$;

$x_1 = 6$; $x_2 = -10$.

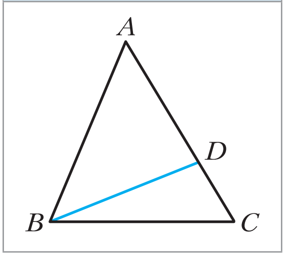
Корень $x_2 = -10$ не удовлетворяет условию $x > 0$.

Следовательно, $BC = 6$ см, $AB = 10$ см.

Ответ: 10 см, 6 см. ◄

Задача 3. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D так, что $CD : AD = 1 : 2$. Найдите отрезок BD, если $AB = 14$ см, $BC = 13$ см, $AC = 15$ см.

Рис. 9



Решение. По теореме косинусов для треугольника ABC (рис. 9):

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC\cos C$.

Отсюда $\cos C = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} =$

$= \dfrac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \dfrac{225 + 169 - 196}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \dfrac{33}{65}$.

Поскольку $CD : AD = 1 : 2$, то $CD = \frac{1}{3}AC = 5$ см.

Тогда в треугольнике BCD:

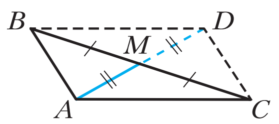
$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos C = 13^2 + 5^2 - 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot \frac{33}{65} = 128.$

Следовательно, $BD = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ (см).

Ответ: $8\sqrt{2}$ см. ◄

Задача 4. Две стороны треугольника равны 23 см и 30 см, а медиана, проведённая к большей из известных сторон, — 10 см. Найдите третью сторону треугольника.

Рис. 10



Решение. Пусть в треугольнике ABC $AC = 23$ см, $BC = 30$ см, отрезок AM — медиана, $AM = 10$ см.

На продолжении отрезка AM за точку M отложим отрезок MD, равный медиане AM (рис. 10). Тогда $AD = 20$ см.

В четырёхугольнике $ABDC$ диагонали AD и BC точкой M пересечения делятся пополам ($BM = MC$ по условию, $AM = MD$ по построению). Следовательно, четырёхугольник $ABDC$ — параллелограмм.

Так как сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон, то:

$AD^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2).$

Тогда

$20^2 + 30^2 = 2(AB^2 + 23^2);$

$400 + 900 = 2(AB^2 + 529);$

$AB^2 = 121;$

$AB = 11$ см.

Ответ: 11 см. ◄

1. Сформулируйте теорему косинусов.

2. Остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник со сторонами a, b и c, где a — его наибольшая сторона, если:
1) $a^2 < b^2 + c^2$; 2) $a^2 > b^2 + c^2$; 3) $a^2 = b^2 + c^2$?

3. Как связаны между собой диагонали и стороны параллелограмма?

Упражнения

28. Найдите неизвестную сторону треугольника ABC, если:
1) $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 60°$;
2) $AB = 3$ см, $AC = 2\sqrt{2}$ см, $\angle A = 135°$.