УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721.6
М52

Одобрено Научно-редакционным советом корпорации «Российский учебник» под председательством академиков Российской академии наук В. А. Тишкова и В. А. Черешнева

Под редакцией проректора МГУ им. М. В. Ломоносова, доктора физико-математических наук В. Е. Подольского

Мерзляк, А. Г.

М52 Геометрия : 9 класс : учебник / А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков ; под ред. В. Е. Подольского. — 2-е изд., стереотип. — М. : Вентана-Граф, 2020. — 304 с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-360-11408-6

Учебник предназначен для углублённого изучения геометрии в 9 классе и входит в комплект из трёх книг: «Геометрия. 7 класс», «Геометрия. 8 класс», «Геометрия. 9 класс» (авт. А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков).

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721.6

РОССИЙСКИЙ УЧЕБНИК

Учебное издание

Мерзляк Аркадий Григорьевич, **Поляков** Виталий Михайлович

Геометрия

9 класс

Учебник

Редактор *Е. В. Буцко*
Макет *А. Б. Орешиной*. Художественный редактор *Я. И. Яхина*
Фотографии: Shutterstock/FOTODOM, Фотобанк «Лори», www.kremlin.ru
Художники *Д. В. Мокшин, Ю. А. Белобородова, Н. А. Морозова, М. А. Тамазова, С. М. Кочеткова, М. А. Хавторин*
Внешнее оформление *К. С. Стеблев*. Компьютерная вёрстка *О. В. Поповой*
Технический редактор *С. А. Толмачёва*. Корректор *Г. И. Мосякина*

Подписано в печать 24.06.19. Формат 70×90/16. Гарнитура SchoolBook
Печать офсетная. Печ. л. 19,0. Тираж 3000 экз. Заказ №

ООО Издательский центр «Вентана-Граф». 123308, г. Москва, ул. Зорге, д. 1, эт. 5

росучебник.рф/метод

Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги можно отправлять по электронному адресу: expert@rosuchebnik.ru
По вопросам приобретения продукции издательства обращайтесь: тел.: 8-800-700-64-83; e-mail: sales@rosuchebnik.ru
Электронные формы учебников, другие электронные материалы и сервисы: lecta.rosuchebnik.ru, тел.: 8-800-555-46-68
В помощь учителю и ученику: регулярно пополняемая библиотека дополнительных материалов к урокам, конкурсы и акции с поощрением победителей, рабочие программы, вебинары и видеозаписи открытых уроков росучебник.рф/метод

ISBN 978-5-360-11408-6

От авторов

Дорогие девятиклассники!

Мы надеемся, что вы не разочаровались, выбрав нелёгкий путь обучения в математическом классе. В этом учебном году вы продолжите изучать геометрию по углублённой программе. Надеемся, что этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках.

Ознакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Учебник разделён на шесть глав, каждая из которых состоит из параграфов. В параграфах изложен теоретический материал. Особое внимание обращайте на текст, напечатанный **жирным шрифтом**, ***жирным курсивом*** и *курсивом*; так в книге выделены определения, правила и важнейшие математические утверждения.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и сложные задачи.

Если после выполнения домашних заданий остаётся свободное время и вы хотите знать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный там, непрост. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

Условные обозначения

◆

Простые задачи

◆ ◆

Задачи среднего уровня сложности

◆ ◆ ◆

Сложные задачи

Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

Окончание доказательства теоремы

Окончание доказательства следствия

Окончание доказательства леммы

Окончание решения задачи

3.6 Задания, рекомендуемые для домашней работы

9.1 Задания, рекомендуемые для устной работы глава

1 Решение треугольников

- В этой главе вы узнаете, что называют синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.
- Вы научитесь по двум сторонам треугольника и углу между ними находить третью сторону, а также по стороне и двум прилежащим к ней углам находить две другие стороны треугольника.
- В 8 классе вы научились решать прямоугольные треугольники. Изучив материал этой главы, вы сможете решать треугольники любого вида.
- Вы узнаете новые формулы, с помощью которых можно находить площадь треугольника.

§ 1 Синус, косинус, тангенс и котангенс угла от 0° до 180°

Понятия «синус», «косинус», «тангенс» и «котангенс» острого угла вам знакомы из курса геометрии 8 класса. Расширим эти понятия для произвольного угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

В верхней полуплоскости координатной плоскости рассмотрим полуокружность с центром в начале координат, радиус которой равен 1 (рис. 1.1). Такую полуокружность называют **единичной**.

Будем говорить, что **углу α** ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) **соответствует точка** M единичной полуокружности, если $\angle MOA = \alpha$, где точки O и A имеют соответственно координаты (0; 0) и (1; 0) (см. рис. 1.1). Например, на рисунке 1.1 углу, равному 90°, соответствует точка C; углу, равному 180°, — точка B; углу, равному 0°, — точка A.

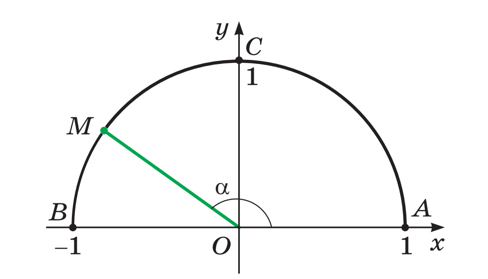

Рис. 1.1

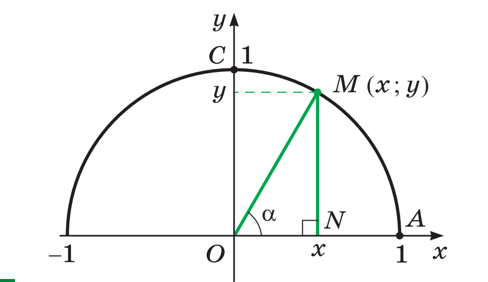

Рис. 1.2

Пусть α — острый угол. Ему соответствует некоторая точка $M\ (x;\ y)$ дуги AC (рис. 1.2). Из прямоугольного треугольника OMN получаем:

$$\cos\alpha = \frac{ON}{OM}, \quad \sin\alpha = \frac{MN}{OM}.$$

Поскольку $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, то

$$x = \cos\alpha,\ y = \sin\alpha.$$

Итак, косинус и синус острого угла α — это соответственно абсцисса и ордината точки M единичной полуокружности, соответствующей углу α.

Полученный результат подсказывает, как определить синус и косинус произвольного угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Определение

Косинусом и синусом угла α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) называют соответственно абсциссу x и ординату y точки M единичной полуокружности, соответствующей углу α (рис. 1.3).

Пользуясь таким определением, можно, например, установить, что: $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$.

Если $M\ (x;\ y)$ — произвольная точка единичной полуокружности, то $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$. Следовательно, для любого угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, имеем:

$$0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Если α — тупой угол, то абсцисса точки, соответствующей этому углу, отрицательна. Следовательно, косинус тупого угла является от-

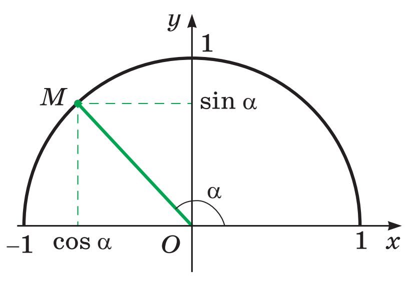

Рис. 1.3

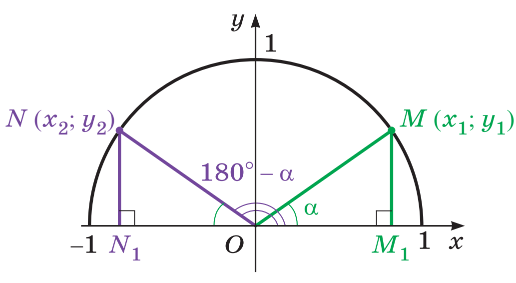

Рис. 1.4

рицательным числом. Справедливо и такое утверждение: если $\cos\alpha < 0$, то α — тупой или развёрнутый угол.

Из курса геометрии 8 класса вы знаете, что для любого острого угла α выполняются равенства

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

Эти формулы остаются справедливыми и для $\alpha = 0^\circ$, и для $\alpha = 90^\circ$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Пусть углам α и $180^\circ - \alpha$, где $\alpha \neq 0^\circ$, $\alpha \neq 90^\circ$ и $\alpha \neq 180^\circ$, соответствуют точки $M(x_1; y_1)$ и $N(x_2; y_2)$ единичной полуокружности (рис. 1.4).

Прямоугольные треугольники OMM_1 и ONN_1 равны по гипотенузе и острому углу ($ON = OM = 1$, $\angle MOM_1 = \angle NON_1 = \alpha$). Отсюда $y_2 = y_1$ и $x_2 = -x_1$. Следовательно,

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

Убедитесь самостоятельно, что эти равенства остаются верными для $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 180^\circ$.

Если α — острый угол, то, как вы знаете из курса геометрии 8 класса, справедливо тождество, которое называют **основным тригонометрическим тождеством**.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Это равенство остаётся верным для $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 180^\circ$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Пусть α — тупой угол. Тогда угол $180^\circ - \alpha$ является острым. Имеем:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (\sin(180^\circ - \alpha))^2 + (-\cos(180^\circ - \alpha))^2 =$$
$$= \sin^2(180^\circ - \alpha) + \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1.$$

Следовательно, равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ выполняется для всех $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$.

Для того чтобы сравнивать значения $\sin\alpha$ и $\sin\beta$, а также $\cos\alpha$ и $\cos\beta$, воспользуемся следующими наглядно понятными соображениями:

если $0^\circ \leqslant \alpha < \beta \leqslant 90^\circ$, то $\sin\alpha < \sin\beta$ (рис. 1.5);

если $90^\circ \leqslant \alpha < \beta \leqslant 180^\circ$, то $\sin\alpha > \sin\beta$ (рис. 1.6);

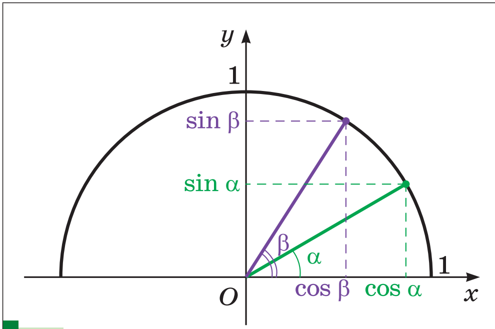

Рис. 1.5

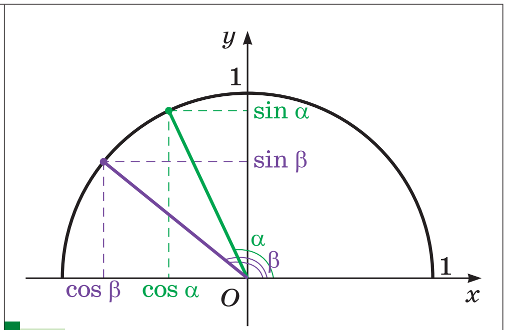

Рис. 1.6

если $0° \leqslant \alpha < \beta \leqslant 180°$, то $\cos\alpha > \cos\beta$ (рис. 1.5, 1.6).

Определение

Тангенсом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ и $\alpha \neq 90°$, называют отношение $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, т. е.

$$\mathbf{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Поскольку $\cos 90° = 0$, то $\operatorname{tg}\alpha$ не определён для $\alpha = 90°$.

Определение

Котангенсом угла α, где $0° < \alpha < 180°$, называют отношение $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, т. е.

$$\mathbf{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Поскольку $\sin 0° = \sin 180° = 0$, то $\operatorname{ctg}\alpha$ не определён для $\alpha = 0°$ и $\alpha = 180°$.

Очевидно, что каждому углу α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) соответствует *единственная* точка единичной полуокружности. Значит, каждому углу α соответствует единственное число, которое является значением синуса (косинуса, тангенса для $\alpha \neq 90°$, котангенса для $\alpha \neq 0°$ и $\alpha \neq 180°$). Поэтому зависимость значения синуса (косинуса, тангенса, котангенса) от величины угла является функциональной.

Функции $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, $p(\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, соответствующие этим функциональным зависимостям, называют **тригонометрическими функциями** угла α.

Задача 1. Докажите, что $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$;

$\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = \frac{\cos(180° - \alpha)}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha$. ■

Задача 2. Найдите $\sin 120°$, $\cos 120°$, $\operatorname{tg} 120°$, $\operatorname{ctg} 120°$.

Решение. Имеем: $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$;

$\operatorname{tg} 120° = \operatorname{tg}(180° - 60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$;

$\operatorname{ctg} 120° = \operatorname{ctg}(180° - 60°) = -\operatorname{ctg} 60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. ■

?

1. Какую полуокружность называют единичной?
2. Что называют синусом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
3. Что называют косинусом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
4. В каких пределах находятся значения $\sin\alpha$, если $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
5. В каких пределах находятся значения $\cos\alpha$, если $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
6. Чему равен $\sin(180° - \alpha)$? $\cos(180° - \alpha)$?
7. Как связаны между собой синус и косинус одного и того же угла?
8. Что называют тангенсом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ и $\alpha \neq 90°$?
9. Что называют котангенсом угла α, где $0° < \alpha < 180°$?

Упражнения

1.1. Чему равен:

1) $\sin(180° - \alpha)$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$;

2) $\cos(180° - \alpha)$, если $\cos\alpha = 0{,}7$;

3) $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -5$;

4) $\operatorname{ctg}(180° - \alpha)$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{3}$?

1.2. Углы α и β смежные, $\cos\alpha = -\frac{1}{6}$.

1) Найдите $\cos\beta$.

2) Какой из углов α и β является острым, а какой — тупым?

1.3. Найдите значение выражения:

1) $2\sin 90° + 3\cos 0° + \operatorname{ctg} 90°$;

2) $3\sin 0° - 5\cos 180° + \operatorname{tg} 180°$;

3) $\operatorname{tg} 23° \operatorname{tg} 0° \operatorname{tg} 106°$;

4) $6\ \mathrm{tg}\,180° + 5\sin 180° + \cos 180°$;

5) $\cos^2 165° + \sin^2 165°$;

6) $\dfrac{\sin 0° + \sin 90°}{\cos 0° - \cos 90°}$.

1.4. Вычислите:

1) $4\cos 90° + 2\cos 180° - \mathrm{ctg}\,90°$;

2) $\cos 0° - \cos 180° + \sin 90° + \mathrm{tg}\,180°$.

1.5. Чему равен синус угла, если его косинус равен: 1) 1; 2) 0?

1.6. Чему равен косинус угла, если его синус равен: 1) 1; 2) 0?

1.7. Чему равен тангенс угла, если его котангенс равен: 1) 1; 2) $-\dfrac{1}{3}$?

1.8. Чему равен котангенс угла, если его тангенс равен: 1) –1; 2) 3?

1.9. Найдите $\sin 135°$, $\cos 135°$, $\mathrm{tg}\,135°$, $\mathrm{ctg}\,135°$.

1.10. Найдите $\sin 150°$, $\cos 150°$, $\mathrm{tg}\,150°$, $\mathrm{ctg}\,150°$.

1.11. Существует ли угол α, для которого:

1) $\sin\alpha = 0{,}3$;

2) $\cos\alpha = -0{,}99$;

3) $\cos\alpha = 1{,}001$;

4) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$?

1.12. Найдите:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ и $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$;

2) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$;

3) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$;

4) $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ и $90° < \alpha \leqslant 180°$;

5) $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ и $0° < \alpha \leqslant 90°$.

1.13. Найдите:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ и $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$;

2) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{6}$;

3) $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ и $0° \leqslant \alpha < 90°$;

4) $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{8}{17}$.

1.14. Верно ли утверждение (ответ обоснуйте):

1) косинус острого угла больше косинуса тупого угла;

2) существует тупой угол, синус и косинус которого равны;

3) существует угол, синус и косинус которого равны нулю;

4) косинус угла треугольника является неотрицательным числом;
5) синус угла треугольника может быть равным отрицательному числу;
6) косинус угла треугольника может быть равным нулю;
7) синус угла треугольника может быть равным нулю;
8) синусы смежных углов равны;
9) косинусы неравных смежных углов являются противоположными числами;
10) если косинусы двух углов равны, то равны и сами углы;
11) если синусы двух углов равны, то равны и сами углы;
12) тангенс острого угла больше тангенса тупого угла;
13) тангенс острого угла больше котангенса тупого угла?

1.15. Сравните с нулём значение выражения:
1) $\sin 110° \cos 140°$;
2) $\sin 80° \cos 100° \cos 148°$;
3) $\sin 128° \cos^2 130° \operatorname{tg} 92°$;
4) $\sin 70° \cos 90° \operatorname{tg} 104°$;
5) $\operatorname{ctg} 100° \sin 114° \cos 11°$;
6) $\cos 85° \sin 171° \operatorname{ctg} 87°$.

1.16. Найдите значение выражения:
1) $2 \sin 120° + 4 \cos 150° - 2 \operatorname{tg} 135°$;
2) $\cos 120° - 8 \sin^2 150° + 3 \cos 90° \cos 162°$;
3) $\cos 180° (\sin 135° \operatorname{tg} 60° - \cos 135°)^2$;
4) $2 \sin^2 30° + \cos^2 60° + \sin^2 45° + \operatorname{tg}^2 60° - \operatorname{ctg}^2 30°$.

1.17. Чему равно значение выражения:
1) $2 \sin 150° - 4 \cos 120° + 2 \operatorname{tg} 135°$;
2) $\operatorname{tg} 45° \sin 60° \operatorname{ctg} 30°$;
3) $\sin 90° (\operatorname{tg} 150° \cos 135° - \operatorname{tg} 120° \cos 135°)^2$?

1.18. Найдите значение выражения, не пользуясь калькулятором:
1) $\dfrac{\sin 18°}{\sin 162°}$; 2) $\dfrac{\cos 18°}{\cos 162°}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg} 18°}{\operatorname{tg} 162°}$; 4) $\dfrac{\operatorname{ctg} 18°}{\operatorname{ctg} 162°}$.

1.19. Найдите значение выражения, не пользуясь калькулятором:
1) $\dfrac{\cos 49°}{\cos 131°}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg} 12°}{\operatorname{tg} 168°}$; 3) $\dfrac{\sin 53°}{\sin 127°}$.

1.20. Найдите сумму квадратов синусов всех углов прямоугольного треугольника.

1.21. Найдите сумму квадратов косинусов всех углов прямоугольного треугольника.

1.22 Сравните:
1) $\sin 17°$ и $\sin 35°$;
2) $\cos 1°$ и $\cos 2°$;
3) $\cos 89°$ и $\cos 113°$;
4) $\sin 50°$ и $\sin 140°$;
5) $\dfrac{1}{2}$ и $\sin 40°$;
6) $-\dfrac{1}{2}$ и $\cos 130°$.

1.23. Сравните:

1) $\sin 118°$ и $\sin 91°$;
2) $\cos 179°$ и $\cos 160°$;
3) $\cos 75°$ и $\cos 175°$;
4) $\sin 70°$ и $\sin 105°$;
5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos 20°$;
6) $\frac{1}{2}$ и $\sin 130°$.

1.24. В треугольнике ABC известно, что $\angle B = 60°$, точка O — центр вписанной окружности. Чему равен косинус угла AOC?

1.25. Точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC. Известно, что $\cos \angle BOC = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите угол A треугольника.

◆ ◆

1.26. В непрямоугольном треугольнике ABC известно, что $\angle B = 30°$, точка H — ортоцентр. Чему равен тангенс угла AHC?

1.27. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Известно, что $\cos \angle AHC = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Найдите угол B треугольника.

1.28. Точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC. Известно, что $\sin \angle AOC = \frac{1}{2}$. Найдите угол B треугольника.

1.29. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Известно, что $\sin \angle AHC = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите угол B треугольника.

1.30. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Известно, что $\sin \angle AOC = \frac{1}{2}$. Найдите угол B треугольника.

◆ ◆ ◆

1.31. Вычислите $\operatorname{ctg} 5° \operatorname{ctg} 15° \operatorname{ctg} 25° \cdot \ldots \cdot \operatorname{ctg} 75° \operatorname{ctg} 85°$.

1.32. Вычислите $\operatorname{tg} 10° \operatorname{tg} 20° \operatorname{tg} 30° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 70° \operatorname{tg} 80°$.

§ 2 Теорема косинусов

Из первого признака равенства треугольников следует, что две стороны и угол между ними однозначно определяют треугольник. А значит, по указанным элементам можно найти третью сторону треугольника. Как это сделать, показывает следующая теорема.

Теорема 2.1

(теорема косинусов)

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон и косинуса угла между ними.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC. Докажем, например, что

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Возможны три случая.

Первый случай. Угол A острый.

Ясно, что хотя бы один из углов B или C является острым. Пусть, например, $\angle C < 90°$. Проведём высоту BD (рис. 2.1).

В прямоугольном треугольнике ABD получаем: $BD = AB \cdot \sin A$, $AD = AB \cdot \cos A$.

В прямоугольном треугольнике $\triangle BDC$ получаем:

$$\begin{aligned} BC^2 &= BD^2 + CD^2 = BD^2 + (AC - AD)^2 = \\ &= AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 = \\ &= AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A = \\ &= AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A = \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A. \end{aligned}$$

Если $\angle C \geqslant 90°$, то $\angle B < 90°$. Тогда надо провести высоту треугольника ABC из вершины C. Дальнейшее доказательство аналогично рассмотренному.

Второй случай. Угол A тупой.

Проведём высоту BD треугольника ABC (рис. 2.2).

В прямоугольном треугольнике ABD получаем:

$$BD = AB \cdot \sin \angle BAD = AB \cdot \sin(180° - \angle BAC) = AB \cdot \sin \angle BAC,$$

$$AD = AB \cdot \cos \angle BAD = AB \cdot \cos(180° - \angle BAC) = -AB \cdot \cos \angle BAC.$$

В прямоугольном треугольнике BDC получаем:

$$\begin{aligned} BC^2 &= BD^2 + CD^2 = BD^2 + (AC + AD)^2 = \\ &= AB^2 \cdot \sin^2 \angle BAC + (AC - AB \cdot \cos \angle BAC)^2 = \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC. \end{aligned}$$

Третий случай. Угол A прямой (рис. 2.3). Тогда $\cos A = 0$. Доказываемое равенство принимает вид

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

и выражает теорему Пифагора для треугольника ABC ($\angle A = 90°$). ■

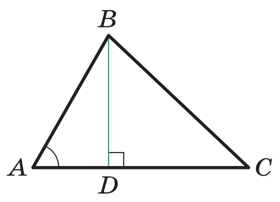

Рис. 2.1

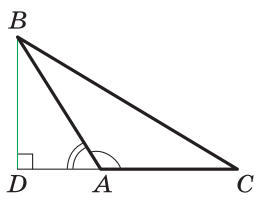

Рис. 2.2

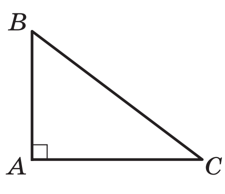

Рис. 2.3

Та часть доказательства, в которой рассмотрен случай, когда угол A прямой, показывает, что теорема Пифагора является частным случаем теоремы косинусов.

Если воспользоваться обозначениями для длин сторон и величин углов треугольника ABC (см. форзац), то, например, для стороны BC можно записать:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

С помощью теоремы косинусов, зная три стороны треугольника, можно определить, является ли он остроугольным, тупоугольным или прямоугольным.

Теорема 2.2

(следствие из теоремы косинусов)

Пусть a, b и c — длины сторон треугольника ABC, причём a — длина его наибольшей стороны. Если $a^2 < b^2 + c^2$, то треугольник остроугольный. Если $a^2 > b^2 + c^2$, то треугольник тупоугольный. Если $a^2 = b^2 + c^2$, то треугольник прямоугольный.

Доказательство

По теореме косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Отсюда $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$.

Пусть $a^2 < b^2 + c^2$. Тогда $b^2 + c^2 - a^2 > 0$. Следовательно, $2bc\cos\alpha > 0$, т. е. $\cos\alpha > 0$. Поэтому угол α — острый.

Поскольку a — длина наибольшей стороны треугольника, то против этой стороны лежит наибольший угол, который, как мы доказали, является острым. Следовательно, в этом случае треугольник является остроугольным.

Пусть $a^2 > b^2 + c^2$. Тогда $b^2 + c^2 - a^2 < 0$, а значит, $2bc\cos\alpha < 0$, т. е. $\cos\alpha < 0$. Следовательно, угол α — тупой.

Пусть $a^2 = b^2 + c^2$. Тогда $2bc\cos\alpha = 0$, т. е. $\cos\alpha = 0$. Отсюда $\alpha = 90°$. ■

Теорема 2.3

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Доказательство

На рисунке 2.4 изображён параллелограмм $ABCD$.

Пусть $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $\angle BAD = \alpha$, тогда $\angle ADC = 180° - \alpha$.

По теореме косинусов для треугольника ABD получаем:

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha. \qquad (1)$$

По теореме косинусов для треугольника ACD получаем:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha) \text{ или}$$

$$AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha. \qquad (2)$$

Сложив равенства (1) и (2), получим

$$BD^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2. \blacksquare$$

Задача 1. Докажите, что в треугольнике ABC (см. обозначения на форзаце):

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$

$$m_b^2 = \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4},$$

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Решение. Пусть отрезок BM — медиана треугольника ABC. На луче BM отметим такую точку D, что $BM = MD$ (рис. 2.5). Тогда четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Используя теорему 2.3, получаем

$$BD^2 + AC^2 = 2AB^2 + 2BC^2 \text{ или}$$

$$4m_b^2 + b^2 = 2c^2 + 2a^2.$$

Отсюда $m_b^2 = \dfrac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4}$.

Аналогично можно доказать две остальные формулы. $\blacksquare$

Задача 2. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D так, что $CD : AD = 1 : 2$. Найдите отрезок BD, если $AB = 14$ см, $BC = 13$ см, $AC = 15$ см.

Решение. По теореме косинусов из треугольника ABC (рис. 2.6) получаем:

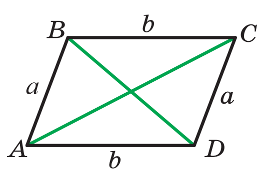

Рис. 2.4

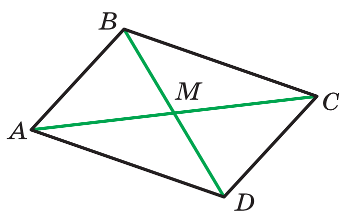

Рис. 2.5

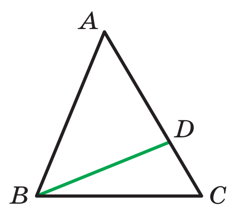

Рис. 2.6

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$,

отсюда $\cos C = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} =$

$= \dfrac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \dfrac{225 + 169 - 196}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \dfrac{33}{65}$.

Поскольку $CD : AD = 1 : 2$, то $CD = \dfrac{1}{3} AC = 5$ см.

Тогда в треугольнике BCD получаем:

$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos C = 13^2 + 5^2 - 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot \dfrac{33}{65} = 128$.

Следовательно, $BD = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ (см).

Ответ: $8\sqrt{2}$ см. ■

Задача 3. На диаметре AB окружности с центром O выбрали точки M и N так, что $OM = ON$. На окружности отметили точку X. Докажите, что сумма $XM^2 + XN^2$ не зависит от выбора точки X.

Решение. Пусть X — точка окружности, отличная от точек A и B. Тогда радиус OX — медиана треугольника MXN (рис. 2.7). Воспользовавшись ключевой задачей 1, получим:

$$XO^2 = \frac{2XM^2 + 2XN^2 - MN^2}{4}. \text{ Отсюда } XM^2 + XN^2 = \frac{4XO^2 + MN^2}{2}.$$

Так как отрезок XO — радиус данной окружности, то значение правой части последнего равенства не зависит от выбора точки X.

Случай, когда точка X совпадает с точкой A или точкой B, рассмотрите самостоятельно. ■

Задача 4. Известно, что длина наибольшей стороны треугольника равна $\sqrt{3}$. Докажите, что три круга с центрами в вершинах треугольника и радиусами 1 полностью покрывают треугольник.

Решение. Очевидно, что эти круги покрывают стороны треугольника.

Пусть внутри треугольника ABC нашлась точка O, не покрытая ни одним из кругов. Очевидно, что один из углов AOB, BOC, COA не меньше $120°$.

Пусть, например, это угол AOC. Тогда $\cos\angle AOC \leqslant -\dfrac{1}{2}$. По теореме косинусов для треугольника AOC получаем: $AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cdot \cos\angle AOC$. С учётом неравенства $\cos\angle AOC \leqslant -\dfrac{1}{2}$ получаем: $AC^2 \geqslant OA^2 + OC^2 + OA \cdot OC$. Поскольку точка O не покрыта кругами с центрами A и C, то $OA > 1$ и $OC > 1$. Тогда $OA^2 + OC^2 + OA \cdot OC > 3$.