

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я72
М52

Мерзляк, А.Г.

М52 Алгебра : 8 класс : самостоятельные и контрольные работы : пособие для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, Е.М. Рабинович и др. — 3-е изд., стереотип. — М. : Вентана-Граф, 2020. — 112 с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-360-11430-7

Пособие содержит упражнения для самостоятельных и контрольных работ. Используется в комплекте с учебником «Алгебра. 8 класс» (авторы А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков).

Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я72

© Мерзляк А.Г., Полонский В.Б.,
Рабинович Е.М., Якир М.С., 2015
© Издательский центр «Вентана-Граф»,
2015

ISBN 978-5-360-11430-7

От авторов

Это пособие вместе с учебником для углублённого изучения математики «Алгебра. 8 класс» авторов А.Г. Мерзляка, В.М. Полякова входят в один учебно-методический комплект.

Первая часть пособия — «Самостоятельные работы» — разделена на четыре однотипных варианта по 41 работе в каждом (самостоятельные работы, имеющие одинаковые номера, являются однотипными). Каждая самостоятельная работа соответствует определённому параграфу учебника, что отражено в названии этой работы. К параграфам учебника, изучение которых предполагает рассмотрение задач многих типов, предлагаются две самостоятельные работы. Наличие аналогичных задач в самостоятельных работах с одинаковыми номерами также позволяет использовать этот материал для отработки навыков решения основных типов задач.

Вторая часть пособия содержит задания для контрольных работ.

Вариант 1

Самостоятельная работа № 1

Множество. Подмножества данного множества

1. Дана функция $f(x) = 3 - |x|$. Какие из следующих утверждений являются верными:
1) $5 \in D(f)$; 3) $5 \notin E(f)$;
2) $4 \in E(f)$; 4) $4 \notin D(f)$?
2. Запишите все собственные подмножества множества натуральных делителей числа 6.
3. Изобразите с помощью диаграммы Эйлера соотношение между множествами A , B и C , если: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{2, 4\}$.

Самостоятельная работа № 2

Операции над множествами

1. Пусть A и B — множества цифр, используемых соответственно для записи чисел 4733 и 843. Найдите:
1) $A \cap B$; 2) $A \cup B$; 3) $A \setminus B$.
2. Даны множества $A = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, -2 \leq x < 3\}$ и $B = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, x \leq 1\}$. Задайте перечислением элементов множество:
1) $A \cap B$; 2) $A \setminus B$.
3. На диаграмме Эйлера (рис. 1) изображены множества A , B и C . Заштрихуйте множество:
1) $(A \cup C) \cap B$; 2) $(A \cap B) \setminus C$.

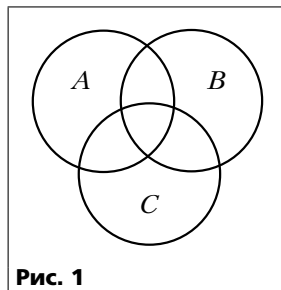


Рис. 1

Самостоятельная работа № 3**Формулы включения-исключения.
Взаимно однозначное соответствие**

1. Докажите, что количество трёхзначных чисел равно количеству пятизначных чисел, в записи которых вторая и четвёртая цифры (считая слева направо) соответственно равны 2 и 7.
2. В 8 классе 26 учеников. Все ученики этого класса увлекаются математикой или химией. Математикой увлекаются 18 человек, а химией — 14 человек. Сколько учеников увлекаются и математикой, и химией?

Самостоятельная работа № 4**Равно мощные множества. Счётные множества**

1. Докажите, что множество чисел вида 3^{n+11} ($n \in \mathbf{N}$) счётно.
2. На координатной плоскости отметили точки $A(1; 0)$, $B(4; 0)$, $C(0; 2)$, $D(0; 6)$. Докажите, что множества точек отрезков AB и CD равно мощны.

Самостоятельная работа № 5**Рациональные дроби**

1. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:
 - 1) $\frac{5+x}{3+x}$;
 - 2) $\frac{4}{|x|-1}$;
 - 3) $\frac{4}{x-1} + \frac{7x}{x-4}$;
 - 4) $\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$?
2. Запишите рациональную дробь, содержащую переменную x , допустимыми значениями которой являются все числа, кроме -10 , -8 и 1 .
3. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной a значение дроби:
 - 1) $\frac{a^2 + 6a + 10}{a^2 - 10a + 25}$ положительное;
 - 2) $\frac{4a - 4 - a^2}{a^4 + 1}$ неположительное.

4. Известно, что $3x + 9y = 2$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{5}{2x + 6y}$; 2) $\frac{4}{9y^2 + 6xy + x^2}$.

Самостоятельная работа № 6

Основное свойство рациональной дроби

1. Сократите дробь:

1) $\frac{6x^2 - 3x}{4 - 8x}$; 4) $\frac{a^3 - 27}{8a - 24}$;
 2) $\frac{m^2 - 16}{m^2 + 8m + 16}$; 5) $\frac{ax - ay - 3x + 3y}{a^2 - 9}$;
 3) $\frac{b^5 - b^3}{b^2 - b^4}$; 6) $\frac{(5x - 10y)^2}{2y - x}$.

2. Запишите в виде дробей с одинаковыми знаменателями дроби:

1) $\frac{5}{6xy^2}$ и $\frac{1}{3x^3}$;
 2) $\frac{4y}{x + 3y}$ и $\frac{3x}{2x - y}$;
 3) $\frac{2x}{2x - y}$, $\frac{1}{4x^2 - y^2}$ и $\frac{3}{4x^2 - 4xy + y^2}$.

3. Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$.

4. Решите уравнение $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.

Самостоятельная работа № 7

Сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями

1. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{2a + 5b}{ab} - \frac{2a - 3b}{ab}$; 3) $\frac{y^2 + 8y}{4 - y^2} - \frac{4y - 4}{4 - y^2}$.
 2) $\frac{5y}{y^2 - 9} - \frac{15}{y^2 - 9}$;

2. Упростите выражение:

$$1) \frac{5}{2-x} - \frac{x^3-3}{x-2}; \quad 2) \frac{16-7x}{(x-4)^2} - \frac{x-x^2}{(4-x)^2}.$$

3. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения $\frac{2x+4}{(x-5)^3} + \frac{x-1}{(5-x)^3} - \frac{15}{(x-5)^3}$ принимает положительные значения.

4. Найдите все натуральные значения n , при которых является целым числом значение выражения:

$$1) \frac{6n+2}{2n-3}; \quad 2) \frac{3n^2+2n-14}{n-2}.$$

Самостоятельная работа № 8

Сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями

1. Представьте в виде дроби выражение:

$$1) \frac{4}{12xy} - \frac{11}{18xy}; \quad 3) 5 - \frac{4m+5n}{n};$$

$$2) \frac{3a-4b}{a} + \frac{8a^2+4b^2}{ab}; \quad 4) \frac{a^2+b^2}{2a-b} + 2a+b.$$

2. Выполните действия:

$$1) \frac{3x}{4x-4} + \frac{5x}{7-7x};$$

$$2) \frac{2b}{2b+c} - \frac{4b^2}{4b^2+4bc+c^2};$$

$$3) \frac{2}{a^2-9} - \frac{1}{a^2+3a}.$$

3. Упростите выражение $\frac{a+3}{a^2+3a+9} - \frac{1}{a-3} + \frac{a^3+3a-9}{a^3-27}$.

4. Докажите тождество:

$$\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} =$$

$$= \frac{4}{x(x+8)}.$$

Самостоятельная работа № 9**Умножение и деление рациональных дробей.
Возведение рациональной дроби в степень**

1. Выполните умножение:

1) $\frac{a^3b}{15c} \cdot \left(-\frac{3c}{a^2b^2}\right)$; 3) $\frac{a^{3n}b^{n+4}}{c^{n+3}} \cdot \frac{c^{2n+3}}{a^{2n}b^{n+1}}$.

2) $18y^3 \cdot \frac{4x^2}{9y^5}$;

2. Выполните возведение в степень:

1) $\left(-\frac{3a}{2b^2}\right)^4$; 2) $\left(-\frac{5a^3b^4}{3c^5d^7}\right)^3$.

3. Выполните деление:

1) $\frac{18m^3n^4}{25p^6q^{10}} : \left(-\frac{4m^2n^9}{75p^5q^{12}}\right)$; 2) $\frac{48x^4y^3}{49z^9} : (16x^7y^8)$.

4. Упростите выражение:

1) $\frac{5y^2 - 20y + 20}{y^3 - 1} \cdot \frac{3y^2 + 3y + 3}{10y - 20}$;

2) $\frac{a^2 - 4b^2}{9a^2 - b^2} : \frac{a^2 + 4ab + 4b^2}{9a^2 - 6ab + b^2}$;

3) $\frac{(a^n + 3b^n)^2 - 12a^n b^n}{a + b} : \frac{a^{2n} - 9n^{2n}}{a^2 - b^2}$.

5. Известно, что $2x + \frac{1}{x} = 7$. Найдите значение выражения $4x^2 + \frac{1}{x^2}$.**Самостоятельная работа № 10****Тождественные преобразования рациональных выражений**

1. Упростите выражение:

1) $\left(\frac{a-2}{a+2} - \frac{a+2}{a-2}\right) : \frac{12a^2}{4-a^2}$; 3) $\frac{m - \frac{14m - 49}{m}}{\frac{7}{m} - 1}$.

2) $\frac{5a}{a+3} + \frac{a-6}{3a+9} \cdot \frac{135}{6a-a^2}$;

2. Докажите тождество:

$$\left(\frac{1}{(a-2)^2} + \frac{2}{a^2-4} + \frac{1}{(a+2)^2} \right) : \frac{2a}{(a^2-4)^2} = 2a.$$

3. Докажите, что при всех допустимых значениях a значение выражения

$$\left(\frac{1}{a+3} - \frac{27}{a^3+27} + \frac{9}{a^2-3a+9} \right) \cdot \left(a - \frac{6a-9}{a+3} \right)$$

не зависит от значения a .

Самостоятельная работа № 11

Равносильные уравнения. Уравнение-следствие. Рациональные уравнения

1. Равносильны ли уравнения:

1) $x^2 = -1$ и $|x| = -2$;

2) $x + 3 = 3 + x$ и $\frac{x+3}{x+3} = 1$;

3) $\frac{x^2-4}{x-2} = 0$ и $x^2 - 4 = 0$;

4) $\frac{(x+2)^2}{x-1} = 0$ и $x+2 = 0$?

2. Какое из уравнений является следствием другого:

1) $(x-1)(x+2) = 0$ и $x+2 = 0$;

2) $\frac{x^2}{x+9} = \frac{81}{x+9}$ и $x^2 - 81 = 0$?

3. Решите уравнение:

1) $\frac{3x-5}{x-1} - \frac{2x-5}{x-2} = 1$;

2) $\frac{x^2+9}{x^2-1} = \frac{x-2}{x+1} - \frac{5}{1-x}$;

3) $\frac{1}{x^2-6x} + \frac{1}{x^2+6x} = \frac{2x}{x^2-36}$.

Самостоятельная работа № 12

Рациональные уравнения с параметрами

1. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

1) $\frac{x-a}{x-2} = 0$; 2) $\frac{(x-5)(x+6)}{x-a} = 0$; 3) $\frac{x-2a}{x+4} = a+1$.

2. При каких значениях параметра a уравнения $(a-1)(x+2) = 0$ и $a^2 + x = a - 2$ равносильны?

Самостоятельная работа № 13

Степень с целым отрицательным показателем

1. Найдите значение выражения:

1) $10^{-1} + 5^{-2}$; 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + (-1,7)^0 - 2^{-3}$; 3) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot 2^{-3}$.

2. Преобразуйте выражение так, чтобы оно не содержало степеней с отрицательными и нулевыми показателями:

1) $\frac{3^{-1}a^3b^{-5}c^{-7}}{2,6^0x^{-5}y^0z^{-30}}$; 2) $(x+2y)^{-1} : (2x^{-1} + y^{-1})^{-2}$.

3. Запишите число в стандартном виде и укажите порядок числа:

1) 12; 2) 0,0034; 3) $320 \cdot 10^3$; 4) $45 \cdot 10^{-4}$.

4. Сравните:

1) $4,7 \cdot 10^{-6}$ и $5,9 \cdot 10^{-7}$; 3) $31,6 \cdot 10^{-8}$ и $0,061 \cdot 10^{-6}$.
2) $1,23 \cdot 10^6$ и $0,12 \cdot 10^7$;

5. Порядок некоторого натурального числа равен 5. Сколько цифр содержит десятичная запись этого числа?

Самостоятельная работа № 14

Свойства степени с целым показателем

1. Представьте выражение в виде степени с основанием a или произведения степеней с разными основаниями:

1) $a^{-8} \cdot a^{12}$; 3) $(a^5b^{-3}c^4)^{-10}$;
2) $a^{-4} : a^{-12}$; 4) $\left(\frac{a^7}{b^{-3}}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{a^{-3}}{b^9}\right)^{-12}$.

2. Найдите значение выражения:

$$1) (13^{-9})^4 \cdot (13^{-2})^{-18}; \quad 3) \frac{21^5 \cdot 3^{-7}}{63^{-2} \cdot 7^8}.$$

$$2) \frac{(-36)^{-3} \cdot 6^4}{216^{-4} \cdot (-6)^9};$$

3. Выполните действия и приведите полученное выражение к виду, не содержащему степени с отрицательным показателем:

$$1) 5a^{-6} \cdot (-3a^{-2}b^3)^{-2};$$

$$2) \frac{17x^{-8}}{14y^{-12}} \cdot \frac{28y}{51x^{-21}};$$

$$3) \left(\frac{8p^{-4}}{q^{-1}} \right)^{-2} \cdot (16p^{-6}q^3)^3.$$

4. Постройте график функции $y = (x - 1) \left(\frac{x - 1}{x + 2} \right)^{-1}$.

5. Упростите выражение:

$$1) (a^{-3} + 2)(a^{-3} - 2) - (a^{-3} + 3)^2;$$

$$2) \frac{x^{-2} - 5y^{-4}}{4x^{-1}y^{-2} + 4y^{-4}} + \frac{y^{-2}}{x^{-1} + y^{-2}}.$$

Самостоятельная работа № 15

Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график

1. Дана функция $y = -\frac{48}{x}$. Найдите:

- 1) значение функции, если значение аргумента равно -3 ;
- 2) значение аргумента, при котором значение функции равно 12 .

2. Найдите значение k , при котором график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A(-5; 8)$.

3. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \frac{6}{x}$ и $y = x + 5$ и запишите координаты точек их пересечения.

4. Постройте график функции:

1) $y = \frac{7}{|x|}$;

2) $y = \begin{cases} -\frac{8}{x}, & \text{если } x \leq -1, \\ 7 - x, & \text{если } x > -1; \end{cases}$

3) $y = \frac{9x - 27}{x^2 - 3x}$.

5. Постройте график уравнения:

1) $(xy - 2)(x - 1) = 0$; 2) $\frac{xy - 2}{x - 1} = 0$.

Самостоятельная работа № 16**Делимость нацело и её свойства**

1. Числа a и b таковы, что $a \div 3$, $b \div 7$. Докажите, что $(7a + 3b) \div 21$.
2. Числа m и n таковы, что значение каждого из выражений $m + 7$ и $n - 29$ кратно 11. Докажите, что значение выражения $m + n$ кратно 11.
3. Решите в целых числах уравнение $x^2 - x + 5xy - 5y = 7$.
4. Докажите, что при любых нечётных натуральных значениях n значение выражения $1^n + 2^n + \dots + 12^n$ кратно 13.

Самостоятельная работа № 17**Деление с остатком. Сравнения по модулю и их свойства**

1. Найдите неполное частное и остаток при делении числа m на число n :
1) $m = 4$, $n = 23$; 2) $m = -61$, $n = 32$.
2. Число x при делении на 3 даёт в остатке 1, а при делении на 4 даёт в остатке 3. Найдите остаток при делении числа x на 12.
3. Известно, что $m \equiv -3 \pmod{6}$, $n \equiv -4 \pmod{6}$. Найдите остаток при делении на 6 числа: 1) $3m - 4n$; 2) mn ; 3) m^2 .
4. Решите в целых числах уравнение $x^2 - 15y = 2$.