УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я72
М52

Одобрено Научно-редакционным советом корпорации «Российский учебник» под председательством академиков Российской академии наук В. А. Тишкова и В. А. Черешнева

Под редакцией проректора МГУ им. М. В. Ломоносова, доктора физико-математических наук В. Е. Подольского

Мерзляк, А. Г.
М52 Геометрия : 8 класс : учебник / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир ; под ред. В. Е. Подольского. — 4-е изд., стереотип. — М. : Вентана-Граф, 2020. — 206, [2] с. : ил. — (Российский учебник).
ISBN 978-5-360-11505-2

Учебник предназначен для изучения геометрии в 8 классе общеобразовательных организаций. В нём предусмотрена уровневая дифференциация, позволяющая формировать у школьников познавательный интерес к математике.

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я72

ISBN 978-5-360-11505-2

От авторов

Дорогие восьмиклассники!

В этом учебном году вы продолжите изучение геометрии. Надеемся, что вы успели полюбить эту важную и красивую науку, а следовательно, с интересом будете овладевать новыми знаниями. Хотелось бы верить, что этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках.

Учебник разделён на четыре главы, каждая из которых состоит из параграфов. В параграфах изложен теоретический материал. Обращайте особое внимание на текст, выделенный **жирным шрифтом**.

Обычно изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, приступать к которым советуем лишь после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности, так и сложные и высокой сложности. Свои знания можно проверить, выполняя задания в тестовой форме, помещённые в конце каждой главы.

Каждый параграф завершается особой рубрикой, которую мы назвали «Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте». В ней собраны задачи, для решения которых нужны не специальные геометрические знания, а лишь здравый смысл, изобретательность и смекалка. Эти задачи полезны, они развивают «геометрическое зрение» и интуицию.

Если после выполнения домашних заданий останется свободное время и вы захотите узнать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный в ней, непростой. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

Условные обозначения

○ Простые задачи

○○ Задачи средней сложности

✧ Сложные задачи

✵ Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

◄ Окончание доказательства теоремы или решения задачи

531 Задания, рекомендуемые для домашней работы

423 Задания, рекомендуемые для устной работы

Глава 1. Четырёхугольники

В этой главе рассматривается знакомая вам геометрическая фигура **четырёхугольник.** В курсе геометрии вы познакомитесь с отдельными видами четырёхугольника: параллелограммом, прямоугольником, ромбом, квадратом, трапецией, изу́чите свойства этих фигур и узнаете о признаках, с помощью которых среди четырёхугольников можно распознать такие фигуры.

Вы изу́чите свойства отрезка, соединяющего середины сторон треугольника, и убедитесь в том, что эти свойства могут служить ключом к решению целого ряда задач.

Как измерить дугу окружности? Около какого четырёхугольника можно описать окружность? В какой четырёхугольник можно вписать окружность? Изучив материал этой главы, вы получите ответы и на эти вопросы.

§ 1. Четырёхугольник и его элементы

На рисунке 1 отрезки AB и BC имеют только одну общую точку B, которая является концом каждого из них. Такие отрезки называют **соседними**. На рисунке 2 каждые два отрезка являются соседними.

Заметим, что отрезки AB и CD на рисунке 3, *а*, *б* не являются соседними.

Рис. 1

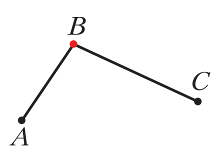


Рис. 2

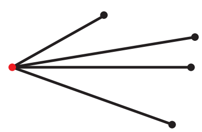
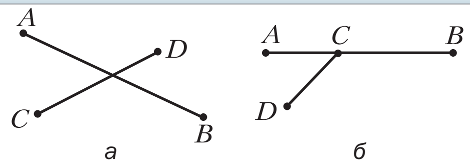


Рис. 3



Рассмотрим фигуру, состоящую из четырёх точек A, B, C, D и четырёх отрезков AB, BC, CD, DA, таких, что *никакие два соседних отрезка не лежат на одной прямой и никакие два несоседних отрезка не имеют общих точек* (рис. 4).

Фигура, образованная этими отрезками, ограничивает часть плоскости, выделенную на рисунке 5 зелёным цветом.

Рис. 4

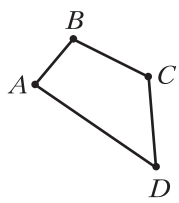
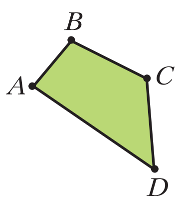


Рис. 5



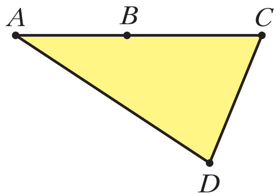
Эту часть плоскости вместе с отрезками AB, BC, CD и DA называют **четырёхугольником**. Точки A, B, C, D называют **вершинами** четырёхугольника, а отрезки AB, BC, CD, DA – **сторонами** четырёхугольника.

На рисунке 6, *а*, *б* изображены фигуры, состоящие из четырёх отрезков AB, BC, CD, DA и части плоскости, которую они ограничивают. Однако эти фигуры не являются четырёхугольниками. Объясните почему.

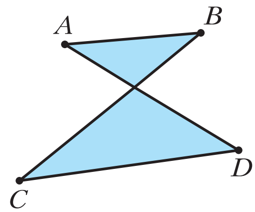
Стороны четырёхугольника, являющиеся соседними отрезками, называют **соседними сторонами** четырёхугольника. Вершины, являющиеся концами одной стороны, называют **соседними вершинами** четырёхугольника. Стороны, не являющиеся соседними, называют **противолежащими сторонами** четырёхугольника. Несоседние вершины называют **противолежащими вершинами** четырёхугольника.

На рисунке 7 изображён четырёхугольник, в котором, например, стороны MQ и MN являются соседними, а стороны NP и MQ – противолежащими, вершины Q и P – соседние, а вершины M и P – противолежащие.

Рис. 6

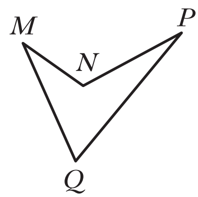


а



б

Рис. 7



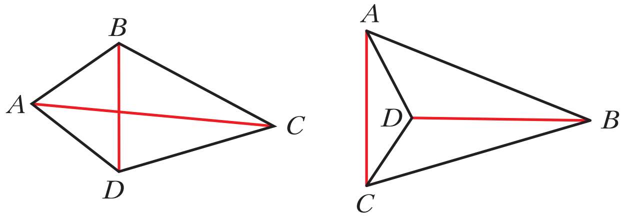
Четырёхугольник называют и обозначают по его вершинам. Например, на рисунке 4 изображён четырёхугольник $ABCD$, а на рисунке 7 – четырёхугольник $MNPQ$. При обозначении четырёхугольника буквы, стоящие рядом, соответствуют соседним вершинам четырёхугольника. Например, четырёхугольник, изображённый на рисунке 7, можно обозначить так: $PQMN$, либо $MQPN$, либо $NPQM$ и т. д.

Сумму длин всех сторон четырёхугольника называют **периметром** четырёхугольника.

Отрезок, соединяющий противолежащие вершины четырёхугольника, называют **диагональю** четырёхугольника. На рисунке 8, *а*, *б* отрезки AC и BD – диагонали четырёхугольника $ABCD$.

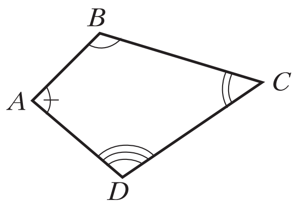
Углы ABC, BCD, CDA, DAB (рис. 9) называют **углами четырёхугольника** $ABCD$. В этом четырёхугольнике все они меньше развёрнутого угла. Такой четырёхугольник называют **выпуклым**. Однако существуют че-

Рис. 8



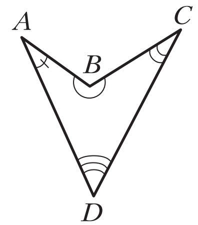
а б

Рис. 9



тырёхугольники, в которых не все углы меньше развёрнутого. Например, на рисунке 10 угол B четырёхугольника $ABCD$ больше развёрнутого. Такой четырёхугольник не является **выпуклым**. Подробнее с выпуклыми многоугольниками вы ознакомитесь в § 19.

Рис. 10



Углы ABC и ADC называют **противолежащими углами** четырёхугольника $ABCD$ (*см.* рис. 9, 10). Также противолежащими являются углы BAD и BCD.

Теорема 1.1

Сумма углов четырёхугольника равна 360°.

Доказательство

В четырёхугольнике проведём диагональ, которая разбивает его на два треугольника. Например, на рисунке 11 это диагональ BD. Тогда сумма углов четырёхугольника $ABCD$ равна сумме углов треугольников ABD и CBD. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то сумма углов четырёхугольника равна 360°. ◄

Рис. 11

а б

Следствие

В четырёхугольнике только один из углов может быть больше развёрнутого.

Докажите это свойство самостоятельно.

Задача 1. Докажите, что длина любой стороны четырёхугольника меньше суммы длин трёх остальных его сторон.

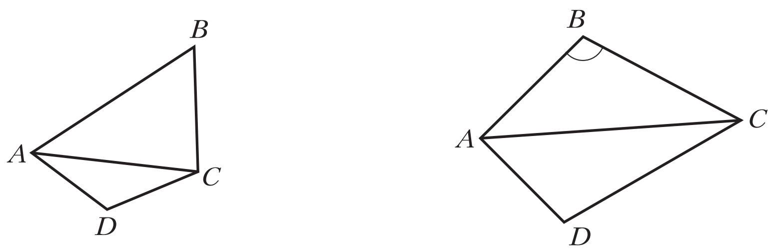
Решение. Рассмотрим произвольный четырёхугольник $ABCD$ (рис. 12, *а*). Покажем, например, что $AB < AD + DC + CB$.

Проведём диагональ AC. Применяя неравенство треугольника для сторон AB и AC соответственно треугольников ABC и ADC, получаем неравенства: $AB < AC + CB$, $AC < AD + DC$.

Отсюда: $AB < AC + CB < AD + DC + CB$.

Следовательно, $AB < AD + DC + CB$. ◄

Рис. 12



а б

Задача 2. Постройте четырёхугольник по двум соседним сторонам и четырём углам, каждый из которых меньше развёрнутого.

Решение. На рисунке 12, *б* изображён четырёхугольник $ABCD$, в котором известны стороны AB и BC, а также все его углы.

В треугольнике ABC известны две стороны AB и BC и угол B между ними. Следовательно, этот треугольник можно построить. Это построение позволяет получить отрезок AC и углы BAC и BCA. Отсюда, зная углы четырёхугольника при вершинах A и C, можно получить углы DAC и DCA. Таким образом, в треугольнике ACD известны сторона и два прилежащих к ней угла. Его тоже можно построить.

Проведённый анализ показывает, как строить искомый четырёхугольник.

Строим треугольник по двум данным сторонам четырёхугольника и углу между ними. На рисунке 12, *б* это треугольник ABC. Далее строим треугольник ACD по полученной стороне AC и найденным углам DAC и DCA. Четырёхугольник $ABCD$ — искомый. ◂

1. Объясните, какие отрезки называют соседними.
2. Объясните, какую фигуру называют четырёхугольником.
3. Какие стороны четырёхугольника называют соседними? Противолежащими?
4. Какие вершины четырёхугольника называют соседними? Противолежащими?
5. Как обозначают четырёхугольник?
6. Что называют периметром четырёхугольника?
7. Что называют диагональю четырёхугольника?
8. Какой четырёхугольник называют выпуклым?
9. Сформулируйте теорему о сумме углов четырёхугольника.

Практические задания

1. Начертите четырёхугольник, в котором:
1) три угла тупые;
2) два соседних угла — прямые, а два других не являются прямыми;
3) одна диагональ точкой пересечения диагоналей делится пополам, а другая не делится пополам;
4) диагонали перпендикулярны.

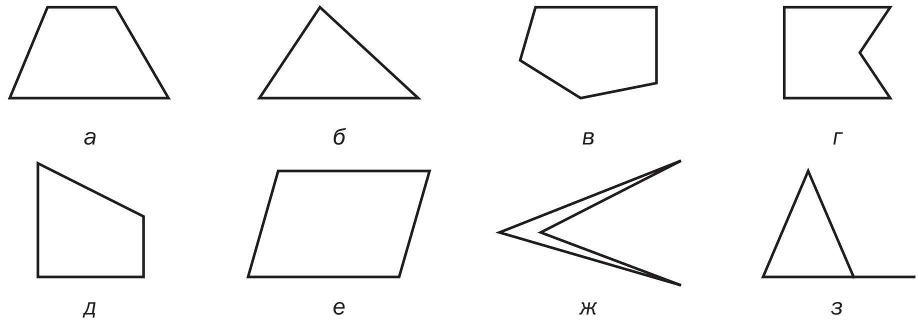
2. Начертите произвольный четырёхугольник, обозначьте его вершины буквами M, K, E, F. Укажите пары его соседних сторон, противолежащих сторон, противолежащих вершин. Запишите три каких-нибудь обозначения этого четырёхугольника.

3. Начертите четырёхугольник, в котором:
1) три угла острые;
2) два противолежащих угла — прямые, а два других не являются прямыми;
3) диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Упражнения

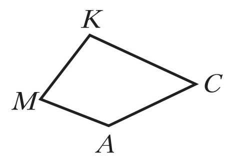
4. Среди фигур, изображённых на рисунке 13, укажите четырёхугольники.

Рис. 13



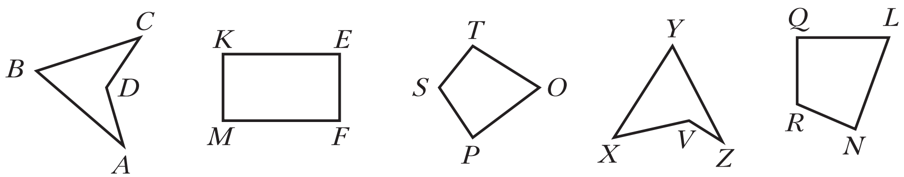
5. Назовите четыре каких-нибудь обозначения четырёхугольника, изображённого на рисунке 14. Укажите:
1) вершины четырёхугольника;
2) его стороны;
3) пары соседних вершин;
4) пары противолежащих вершин;
5) пары соседних сторон;
6) пары противолежащих сторон.

Рис. 14



6. Среди четырёхугольников, изображённых на рисунке 15, укажите выпуклые.

Рис. 15



7. Чему равен четвёртый угол четырёхугольника, если три его угла равны 78°, 89° и 93°?

8. Найдите углы четырёхугольника, если они равны между собой.

9. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle B = 150^\circ$, $\angle A = \angle C = \angle D$. Найдите неизвестные углы четырёхугольника.

10. Один из углов четырёхугольника в 2 раза меньше второго угла, на 20° меньше третьего и на 40° больше четвёртого. Найдите углы четырёхугольника.

11. Найдите углы четырёхугольника, если они пропорциональны числам 2, 3, 10 и 21. Является ли этот четырёхугольник выпуклым?

12. Найдите углы четырёхугольника, если три его угла пропорциональны числам 4, 5 и 7, а четвёртый угол равен их полусумме. Является ли этот четырёхугольник выпуклым?

13. Может ли у четырёхугольника быть:
1) три прямых угла и один острый;
2) три прямых угла и один тупой;
3) четыре прямых угла;
4) четыре острых угла;
5) два прямых и два тупых угла;
6) два прямых угла, один острый и один тупой?

14. Периметр четырёхугольника равен 63 см. Найдите его стороны, если вторая сторона составляет $\frac{2}{3}$ первой, третья — 50 % второй, а четвёртая — 150 % первой.

15. Найдите стороны четырёхугольника, если одна из них на 2 см больше второй, на 6 см меньше третьей, в 3 раза меньше четвёртой, а периметр равен 64 см.

16. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и BC равны, а диагональ BD образует с этими сторонами равные углы. Докажите, что стороны CD и AD также равны.

17. Диагонали четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам, одна из его сторон равна 6 см. Чему равна противолежащая ей сторона четырёхугольника?

18. В четырёхугольнике $MNKP$ известно, что $MN = NK$, $MP = PK$, $\angle M = 100^\circ$. Найдите угол K.

19. В четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC образует со сторонами AB и AD равные углы и со сторонами CB и CD также равные углы, $AB = 8$ см, $BC = 10$ см. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.

20. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 44^\circ$, $\angle B = 56^\circ$. Биссектрисы AK и BM треугольника пересекаются в точке O. Найдите углы четырёхугольника: 1) $MOKC$; 2) $AOBC$.

21. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 36^\circ$, $\angle B = 72^\circ$. Высоты AE и BF треугольника пересекаются в точке H. Найдите углы четырёхугольника: 1) $CFHE$; 2) $ACBH$.

22. Найдите диагональ четырёхугольника, если его периметр равен 80 см, а периметры треугольников, на которые эта диагональ разбивает данный четырёхугольник, равны 36 см и 64 см.

23. Могут ли стороны четырёхугольника быть равными:
1) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 9 дм; 2) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 10 дм?

24. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle A = \angle C = 90^\circ$. Докажите, что биссектрисы двух других углов четырёхугольника либо параллельны, либо лежат на одной прямой.

25. Докажите, что если биссектрисы двух противолежащих углов выпуклого четырёхугольника параллельны или лежат на одной прямой, то два других угла четырёхугольника равны.

26. Постройте четырёхугольник по его сторонам и одному из углов.

27. Постройте четырёхугольник по трём сторонам и двум диагоналям.

28. Постройте четырёхугольник по его сторонам и одной из диагоналей.

29. Постройте четырёхугольник $ABCD$ по углам A и B, сторонам AB и BC и сумме сторон AD и CD.

Готовимся к изучению новой темы

30. Прямая c пересекает каждую из прямых a и b (рис. 16). Укажите пары накрест лежащих и пары односторонних углов, образовавшихся при этом. Каково взаимное расположение прямых a и b, если: 1) $\angle 1 = \angle 4$; 2) $\angle 1 = 20^\circ$, $\angle 3 = 170^\circ$?

31. В четырёхугольнике $ABCD$ (рис. 17) $\angle C = 110^\circ$, $\angle D = 70^\circ$. Докажите, что $BC \parallel AD$.

32. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle A = \angle B = 90^\circ$, $\angle C = 100^\circ$. Являются ли параллельными прямые: 1) BC и AD; 2) AB и CD?

33. На рисунке 18 $AD = BC$, $\angle ADB = \angle CBD$. Докажите, что $AB = CD$ и $AB \parallel CD$.

Рис. 16

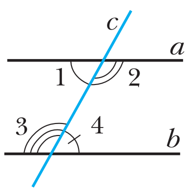


Рис. 17

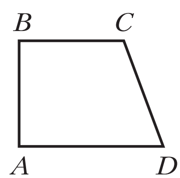
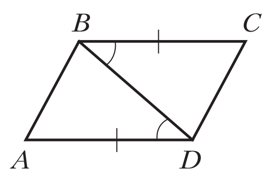


Рис. 18



34. Отрезок BK — биссектриса треугольника ABC. Прямая DK параллельна стороне AB и пересекает сторону BC в точке D, $\angle BDK = 116^\circ$. Найдите $\angle BKD$.

Повторите содержание пунктов 12, 13, 14 на с. 199–200.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

35. Белая плоскость произвольно забрызгана чёрной краской. Докажите, что на плоскости найдётся отрезок длиной 1 м, концы которого закрашены либо белой, либо чёрной краской.

§ 2. Параллелограмм. Свойства параллелограмма

Определение

Параллелограммом называют четырёхугольник, у которого каждые две противолежащие стороны параллельны.

На рисунке 19 изображён параллелограмм $ABCD$. По определению параллелограмма: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

Рассмотрим некоторые свойства параллелограмма.

Теорема 2.1

Противолежащие стороны параллелограмма равны.

Доказательство

На рисунке 19 изображён параллелограмм $ABCD$. Докажем, что $AB = CD$ и $BC = AD$.

Проведём диагональ AC. Докажем, что треугольники ABC и CDA равны (рис. 20).

В этих треугольниках сторона AC — общая, углы 1 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC, углы 3 и 4 равны как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AC (*см.* рис. 20). Следовательно, треугольники ABC и CDA равны по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $AB = CD$ и $BC = AD$. ◄

Рис. 19

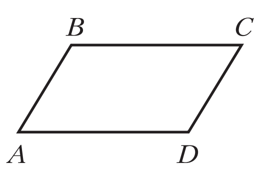
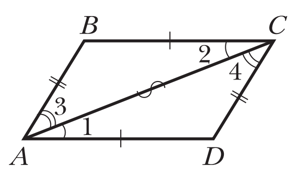


Рис. 20



Теорема 2.2

Противолежащие углы параллелограмма равны.

Доказательство

На рисунке 19 изображён параллелограмм $ABCD$. Докажем, что $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$.

При доказательстве предыдущей теоремы было установлено, что $\Delta ABC = \Delta CDA$ (*см.* рис. 20). Отсюда $\angle B = \angle D$. Из равенства углов 1 и 2 и равенства углов 3 и 4 следует, что $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$. Следовательно, $\angle BAD = \angle BCD$. ◄

Следствие

Параллелограмм является выпуклым четырёхугольником.

Докажите это свойство самостоятельно.

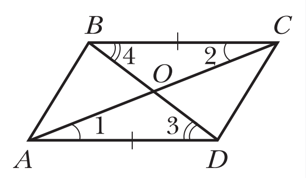
Теорема 2.3

Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство

На рисунке 21 изображён параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажем, что $AO = OC$ и $BO = OD$.

Рис. 21



Рассмотрим треугольники AOD и COB. Они равны.

Действительно, $\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущих AC и BD соответственно. По теореме 2.1 имеем: $AD = BC$. Следовательно, треугольники AOD и COB равны по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $AO = OC$, $BO = OD$. ◄

Определение

Высотой параллелограмма называют перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей сторону параллелограмма, на прямую, содержащую противолежащую сторону.

На рисунке 22 каждый из отрезков AF, QE, BM, CK, PN является высотой параллелограмма $ABCD$.

Из курса геометрии 7 класса вы знаете, что все точки одной из двух параллельных прямых равноудалены от второй прямой. Поэтому $AF = QE$ и $BM = PN = CK$.

Говорят, что **высоты** BM, CK, PN **проведены к сторонам** BC и AD, а высоты AF, QE – к сторонам AB и CD.

__Задача 1.__ Докажите, что прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Решение. Через каждую вершину данного треугольника ABC проведём прямую, параллельную противолежащей стороне. Получим треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 23).

Рис. 22

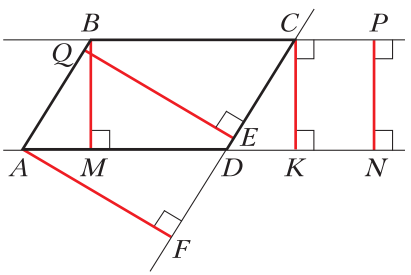
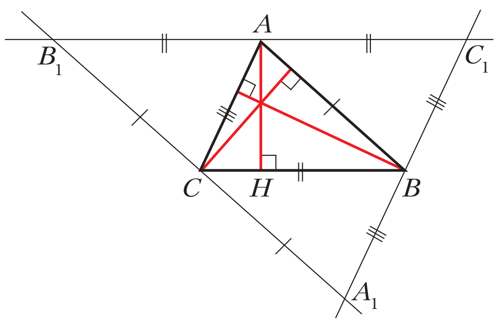


Рис. 23



Из построения следует, что четырёхугольники AC_1BC и $ABCB_1$ – параллелограммы. Отсюда $AC_1 = BC = AB_1$. Следовательно, точка A является серединой отрезка B_1C_1.

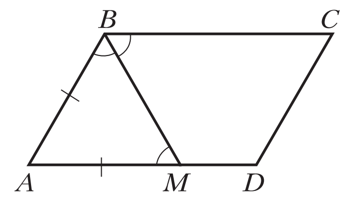
Так как прямые B_1C_1 и BC параллельны, то высота AH треугольника ABC перпендикулярна отрезку B_1C_1. Следовательно, прямая AH – серединный перпендикуляр стороны B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично можно доказать, что прямые, содержащие две другие высоты треугольника ABC, являются серединными перпендикулярами сторон C_1A_1 и A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

Так как серединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке, то решение задачи завершено. ◄

__Задача 2.__ Биссектриса тупого угла параллелограмма делит его сторону в отношении 2 : 1, считая от вершины острого угла. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 60 см.

Решение. Пусть биссектриса тупого угла B параллелограмма $ABCD$ (рис. 24) пересекает сторону AD в точке M. По условию $AM : MD = 2 : 1$.

Рис. 24



Углы ABM и CBM равны по условию.

Углы CBM и AMB равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей BM.

Тогда $\angle ABM = \angle AMB$. Следовательно, треугольник BAM — равнобедренный, отсюда $AB = AM$.

Пусть $MD = x$ см, тогда $AB = AM = 2x$ см, $AD = 3x$ см. Так как противолежащие стороны параллелограмма равны, то его периметр равен $2(AB + AD)$. Учитывая, что периметр параллелограмма равен 60 см, получаем:

$2(2x + 3x) = 60$;

$x = 6$.

Следовательно, $AB = 12$ см, $AD = 18$ см.

Ответ: 12 см, 18 см. ◄

1. Какой четырёхугольник называют параллелограммом?
2. Каким свойством обладают противолежащие стороны параллелограмма?
3. Каким свойством обладают противолежащие углы параллелограмма?
4. Каким свойством обладают диагонали параллелограмма?
5. Что называют высотой параллелограмма?

Практические задания

36. На рисунке 25 изображён параллелограмм $ABCD$. Сделайте такой рисунок в тетради. Проведите из точек B и M высоты параллелограмма к стороне AD, а из точки K — высоту к стороне AB.

Рис. 25