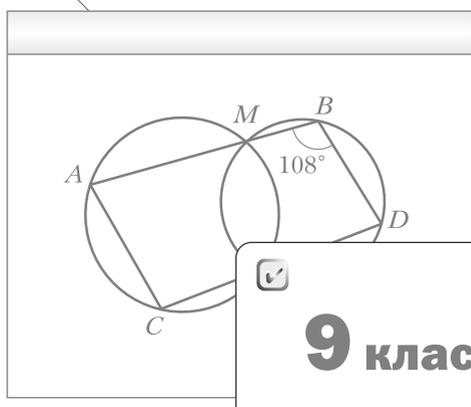


# Геометрия

Дидактические материалы



**9 класс**



Пособие для учащихся  
общеобразовательных организаций

3-е издание, стереотипное



Москва  
Издательский центр  
«Вентана-Граф»  
2020

УДК 373.167.1:514  
ББК 22.151я72  
М52

**Мерзляк, А.Г.**

М52 Геометрия : 9 класс : дидактические материалы : пособие для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, Е.М. Рабинович и др. — 3-е изд., стереотип. — М. : Вентана-Граф, 2020. — 112 с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-360-11546-5

Дидактические материалы содержат упражнения для самостоятельных и контрольных работ. Они используются в комплекте с учебником «Геометрия. 9 класс» (авторы А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир).

Соответствуют Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

УДК 373.167.1:514  
ББК 22.151я72

ISBN 978-5-360-11546-5

© Мерзляк А.Г., Полонский В.Б.,  
Рабинович Е.М., Якир М.С., 2015  
© Издательский центр «Вентана-Граф»,  
2015

### От авторов

Данное пособие вместе с учебником входят в учебно-методический комплект «Геометрия. 9 класс» авторов А.Г. Мерзляка и др.

Раздел «Упражнения» состоит из трёх однотипных вариантов по 306 задач в каждом (задачи, имеющие одинаковые номера, являются однотипными). Этот материал в первую очередь предназначен для самостоятельных проверочных работ. Наличие к каждому типу задач ещё двух аналогичных заданий (по вариантам) позволяет также использовать этот материал для отработки навыков решения основных типов задач.

Раздел «Контрольные работы» содержит примерные контрольные работы.

# Упражнения

## Вариант 1

### Тригонометрические функции угла от $0^\circ$ до $180^\circ$

- Чему равен:
  - $\sin(180^\circ - \alpha)$ , если  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ ;
  - $\cos(180^\circ - \alpha)$ , если  $\cos \alpha = -0,1$ ;
  - $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$ , если  $\operatorname{tg} \alpha = 8$ ;
  - $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha)$ , если  $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{2}{7}$ ?
- Найдите значение выражения:
  - $3\sin 0^\circ + 4\cos 180^\circ$ ;
  - $\cos^2 110^\circ + \sin^2 110^\circ$ ;
  - $5\sin 90^\circ - 7\operatorname{ctg} 90^\circ$ ;
  - $\cos^2 40^\circ + \sin^2 140^\circ$ .
- Найдите:
  - $\alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$  и  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ;
  - $\sin \alpha$ , если  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ ;
  - $\cos \alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{1}{9}$ .
- Сравните с нулём значение выражения:
  - $\sin 115^\circ \operatorname{ctg} 160^\circ$ ;
  - $\sin 52^\circ \cos 90^\circ \operatorname{tg} 106^\circ$ .
- Найдите значение выражения:
  - $\sin 120^\circ \cos 150^\circ \operatorname{tg} 135^\circ$ ;
  - $2\cos^2 135^\circ + 6\sin 150^\circ - 4\operatorname{ctg} 90^\circ \cos 141^\circ$ .
- Найдите значение выражения, не пользуясь таблицами и калькулятором:
  - $\frac{\sin 34^\circ}{\sin 146^\circ} + \frac{\operatorname{tg} 98^\circ}{\operatorname{tg} 82^\circ}$ ;
  - $\frac{\cos 118^\circ}{\cos 62^\circ} - \frac{\operatorname{ctg} 27^\circ}{\operatorname{ctg} 153^\circ}$ .

### Теорема косинусов

- Найдите сторону  $AC$  треугольника  $ABC$ , если:
  - $AB = 4$  см,  $BC = 7$  см,  $\angle B = 60^\circ$ ;
  - $AB = 5\sqrt{2}$  см,  $BC = 4$  см,  $\angle B = 135^\circ$ .

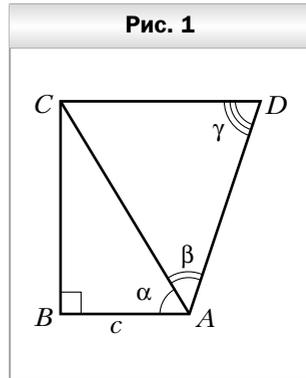
8. Найдите косинус большего угла треугольника, стороны которого равны 5 см, 8 см и 11 см.
9. Определите, остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник, стороны которого равны:
  - 1) 3 см, 4 см и 6 см;
  - 2) 5 см, 6 см и 7 см;
  - 3) 16 см, 30 см и 34 см.
10. Стороны параллелограмма равны 8 см и 10 см, а один из углов равен  $60^\circ$ . Найдите диагонали параллелограмма.
11. Две стороны треугольника равны 6 см и 9 см, а синус угла между ними равен  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ . Найдите третью сторону треугольника.
12. Центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , удалён на 2 см и на 5 см от вершин  $B$  и  $C$  соответственно. Найдите сторону  $BC$ , если  $\angle A = 60^\circ$ .
13. На сторонах  $AB$  и  $AC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) отмечены соответственно такие точки  $D$  и  $E$ , что  $BD = 2$  см,  $CE = 1$  см. Найдите отрезок  $DE$ , если  $AC = 4$  см,  $BC = 2\sqrt{5}$  см.
14. На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  отмечены соответственно такие точки  $D$  и  $E$ , что  $AD = 3$  см,  $EC = 6$  см. Найдите отрезок  $DE$ , если  $AB = 8$  см,  $BC = 12$  см,  $AC = 10$  см.
15. Две стороны треугольника относятся как 3 : 5, а угол между ними равен  $120^\circ$ . Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 45 см.
16. Две стороны треугольника равны 5 см и 7 см, а угол, противолежащий большей из них, —  $120^\circ$ . Найдите третью сторону треугольника.
17. Для сторон  $a$ ,  $b$  и  $c$  треугольника выполняется равенство  $c^2 = a^2 + b^2 + ab\sqrt{3}$ . Докажите, что угол, противолежащий стороне  $c$ , равен  $150^\circ$ .
18. Стороны параллелограмма равны 14 см и 22 см, а его диагонали относятся как 6 : 7. Найдите диагонали параллелограмма.
19. Одна из сторон параллелограмма на 5 см больше другой, а его диагонали равны 17 см и 19 см. Найдите стороны параллелограмма.

20. В четырёхугольнике  $ABCD$   $AB = BC = 10$  см,  $CD = 9$  см,  $AD = 21$  см. Найдите диагональ  $BD$ , если около четырёхугольника  $ABCD$  можно описать окружность.
21. В трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ )  $AB = 8$  см,  $BC = 5$  см,  $CD = 10$  см,  $AD = 12$  см. Найдите косинус угла  $A$  трапеции.
22. Стороны треугольника равны 9 см, 15 см и 16 см. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины его наибольшего угла.
23. Стороны треугольника равны 5 см, 9 см и 10 см. Найдите медиану треугольника, проведённую к его средней по длине стороне.
24. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 8 см, а медиана, проведённая к ней, — 6 см. Найдите основание треугольника.
25. Стороны треугольника равны  $4\sqrt{2}$  см и 3 см, а угол между ними —  $135^\circ$ . Найдите медиану треугольника, проведённую к его третьей стороне.
26. В треугольнике  $ABC$   $AB = 7$  см,  $BC = 9$  см. Найдите сторону  $AC$  и медиану  $BM$ , если  $BM : AC = 2 : 7$ .
27. Сторона треугольника равна 42 см, а медианы, проведённые к двум другим сторонам, — 30 см и 60 см. Найдите третью медиану треугольника.

### Теорема синусов

28. В треугольнике  $ABC$   $BC = 5\sqrt{3}$  см,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 45^\circ$ . Найдите сторону  $AC$ .
29. В треугольнике  $ABC$   $AB = 3\sqrt{2}$  см,  $\angle A = 15^\circ$ ,  $\angle C = 135^\circ$ . Найдите сторону  $AC$ .
30. Найдите угол  $C$  треугольника  $ABC$ , если:
- 1)  $AC = 6$  см,  $AB = 3\sqrt{2}$  см,  $\angle B = 45^\circ$ ;
  - 2)  $AB = 4\sqrt{6}$  см,  $BC = 8$  см,  $\angle A = 45^\circ$ .
- Сколько решений в каждом случае имеет задача?
31. В треугольнике  $ABC$   $AB = 13$  см,  $BC = 8$  см. Может ли  $\sin A$  быть равным  $\frac{2}{3}$ ?

32. В треугольнике  $ABC$   $AB = 6$  см,  $\angle C = 30^\circ$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .
33. Сторона треугольника равна 16 см, а радиус окружности, описанной около треугольника, —  $8\sqrt{2}$  см. Чему равен угол треугольника, противолежащий данной стороне?
34. Две стороны треугольника равны  $3\sqrt{2}$  см и 4 см. Найдите третью сторону треугольника, если она относится к радиусу описанной окружности как  $\sqrt{2} : 1$ .
35. В треугольнике  $ABC$   $\angle A = 54^\circ$ ,  $\angle B = 66^\circ$ , отрезок  $AK$  — высота треугольника. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABK$ , если радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , равен  $4\sqrt{3}$  см.
36. В треугольнике  $ABC$   $BC = a$ ,  $\angle B = \beta$ ,  $\angle C = \gamma$ . Найдите стороны  $AC$  и  $AB$ .
37. На рисунке 1  $AB = c$ ,  $\angle B = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle CAD = \beta$ ,  $\angle D = \gamma$ . Найдите отрезок  $AD$ .
38. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен  $\alpha$ , а биссектриса угла при основании равна  $m$ . Найдите стороны треугольника.
39. В треугольнике  $ABC$  провели биссектрису  $BD$ . Найдите стороны треугольника  $ABC$ , если  $BD = m$ ,  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle C = \gamma$ .
40. Высоты треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , если радиус окружности, описанной около треугольника  $AHB$ , равен 9 см.
41. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 12 см и боковой стороной 10 см.
42. Основания равнобокой трапеции равны 5 см и 21 см, а боковая сторона — 17 см. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.



43. Диагонали равнобокой трапеции перпендикулярны. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции, если её боковая сторона равна  $5\sqrt{2}$  см.
44. В равнобокой трапеции диагональ является биссектрисой острого угла, а основания относятся как 5 : 11. Найдите диагональ трапеции, если радиус окружности, описанной около трапеции, равен 6 см.
45. На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  отметили точку  $D$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ADC$ , если радиус окружности, описанной около треугольника  $BDC$ , равен 12 см,  $AC = 6$  см,  $BC = 8$  см.

### Решение треугольников

46. Найдите неизвестные стороны и углы треугольника  $ABC$ , если:
- 1)  $AC = 8$  см,  $\angle B = 48^\circ$ ,  $\angle C = 56^\circ$ ;
  - 2)  $AB = 4$  см,  $BC = 5$  см,  $\angle B = 110^\circ$ ;
  - 3)  $AB = 3$  см,  $BC = 4$  см,  $AC = 6$  см;
  - 4)  $AB = 4$  см,  $BC = 6$  см,  $\angle A = 100^\circ$ ;
  - 5)  $AB = 8$  см,  $BC = 9$  см,  $\angle A = 40^\circ$ ;
  - 6)  $AB = 6$  см,  $BC = 5$  см,  $\angle A = 20^\circ$ ;
  - 7)  $AB = 6$  см,  $BC = 3$  см,  $\angle A = 40^\circ$ .
47. В треугольнике  $ABC$   $AB = BC = 6$  см,  $\angle B = 40^\circ$ . Найдите: 1) сторону  $AC$ ; 2) высоту  $AD$ ; 3) медиану  $AM$ ; 4) биссектрису  $BK$ ; 5) радиус описанной окружности треугольника  $ABC$ ; 6) радиус вписанной окружности треугольника  $ABC$ .
48. Диагональ равнобокой трапеции  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) равна 4 см,  $\angle CDB = 36^\circ$ ,  $\angle BDA = 48^\circ$ . Найдите: 1) стороны трапеции; 2) радиус окружности, описанной около треугольника  $BDC$ .
49. Большая сторона треугольника равна 6 см, а вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, градусные меры которых относятся как 1 : 4 : 7. Найдите неизвестные стороны треугольника.

50. Меньшая сторона треугольника равна 4 см. В треугольник вписана окружность, которая делится точками касания со сторонами на дуги, градусные меры которых относятся как 3 : 8 : 9. Найдите неизвестные стороны треугольника.

**Формулы для нахождения площади треугольника**

51. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 4 см и 7 см, а угол между ними равен: 1)  $30^\circ$ ; 2)  $120^\circ$ .
52. Найдите площадь параллелограмма, стороны которого равны 8 см и 14 см, а угол между ними —  $150^\circ$ .
53. Стороны параллелограмма равны 6 см и 8 см. Может ли его площадь быть равной  $49 \text{ см}^2$ ?
54. Найдите площадь ромба, сторона которого равна  $7\sqrt{2}$  см, а один из углов —  $135^\circ$ .
55. Две стороны треугольника равны 4 см и 8 см. Может ли его площадь быть равной: 1)  $12 \text{ см}^2$ ; 2)  $18 \text{ см}^2$ ?
56. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен  $120^\circ$ , а его площадь —  $150\sqrt{3} \text{ см}^2$ . Найдите боковую сторону треугольника.
57. Отрезки  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $O$  (рис. 2),  $AO = OB$ ,  $CO = 3$  см,  $OD = 5$  см. Найдите отношение площадей треугольников  $AOC$  и  $DOB$ .
58. На сторонах угла  $A$  отложены отрезки  $AB = 4$  см,  $BC = 5$  см,  $AD = 6$  см и  $DE = 2$  см (рис. 3). Найдите отношение площадей треугольника  $ABD$  и четырёхугольника  $BCED$ .

Рис. 2

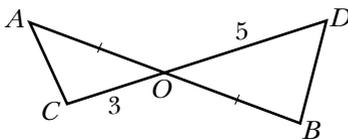
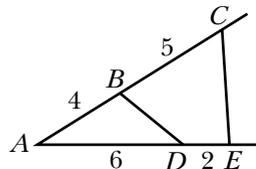


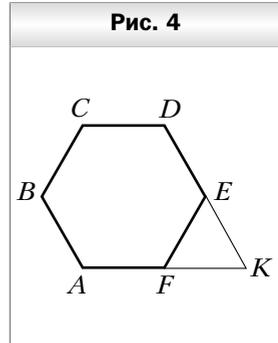
Рис. 3



59. Найдите площадь треугольника со сторонами 3 см, 25 см и 26 см.
60. Три окружности, радиусы которых равны 12 см, 14 см и 16 см, попарно касаются друг друга внешним образом. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются центры этих окружностей.
61. Стороны треугольника равны 9 см, 10 см и 17 см. Найдите наименьшую высоту треугольника, радиусы вписанной в него и описанной около него окружностей.
62. В треугольник со сторонами 26 см, 15 см и 37 см вписана окружность, центр которой соединён с вершинами треугольника. Найдите площади трёх образовавшихся треугольников.
63. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки длиной 5 см и 6 см. Меньшая из двух других сторон равна 15 см. Найдите площадь треугольника.
64. Углы ромба относятся как 1 : 3, а его сторона равна 8 см. Найдите площадь ромба.
65. Площадь прямоугольника равна  $16\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>, а угол между его диагоналями —  $60^\circ$ . Найдите стороны прямоугольника.
66. Диагонали четырёхугольника равны 4 см и 8 см, а угол между ними —  $30^\circ$ . Найдите площадь четырёхугольника.
67. Диагонали четырёхугольника равны 5 см и 8 см, а его площадь —  $10\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>. Найдите угол между диагоналями четырёхугольника.
68. Катет равнобедренного прямоугольного треугольника равен 4 см. На сторонах треугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Найдите площадь шестиугольника, вершинами которого являются вершины квадратов, не принадлежащих данному треугольнику.
69. Диагонали выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ . Площади треугольников  $AMB$ ,  $BMC$  и  $CMD$  соответственно равны 6 см<sup>2</sup>, 4 см<sup>2</sup> и 8 см<sup>2</sup>. Найдите площадь четырёхугольника  $ABCD$ .
70. В окружность вписан четырёхугольник, стороны которого последовательно равны 3 см, 5 см, 8 см и 10 см. Найдите площадь четырёхугольника.

**Правильные многоугольники и их свойства**

71. Найдите углы правильного пятиугольника.
72. Найдите количество сторон правильного многоугольника, если: 1) его угол равен  $168^\circ$ ; 2) угол, смежный с углом многоугольника, равен  $18^\circ$ .
73. На рисунке 4 изображён правильный шестиугольник  $ABCDEF$ ,  $K$  — точка пересечения прямых  $DE$  и  $AF$ . Найдите угол  $AKD$ .
74. Определите количество сторон правильного многоугольника, если угол, смежный с углом многоугольника, составляет  $\frac{2}{3}$  угла многоугольника.
75. Найдите центральный угол правильного тридцатиугольника.
76. Центральный угол правильного многоугольника равен  $15^\circ$ . Найдите количество сторон многоугольника.
77. Пусть  $a_3$  — сторона правильного треугольника,  $R$  и  $r$  — соответственно радиусы описанной около него и вписанной в него окружностей. Заполните таблицу (размеры даны в сантиметрах).



$a_3$	$R$	$r$
$9\sqrt{3}$		
	$2\sqrt{3}$	
		4

78. Найдите радиусы описанной около правильного треугольника и вписанной в него окружностей, если их разность равна 8 см.
79. Найдите отношение площадей правильных треугольника и четырехугольника, стороны которых равны.